

Exercice 1 (6 points)

Commun à tous les candidats

Partie A - Restitution organisée de connaissances :

Soit a et b deux réels tels que $a < b$ et f et g deux fonctions continues sur l'intervalle $[a, b]$.

On suppose connus les résultats suivants :

- $\int_a^b (f(t) + g(t)) dt = \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt$.
- Si pour tout $t \in [a, b]$, $f(t) \geq 0$ alors $\int_a^b f(t) dt \geq 0$.

Montrer que : si pour tout $t \in [a, b]$, $f(t) \leq g(t)$ alors $\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$.

Partie B

Soit n un entier naturel non nul. On appelle f_n la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f_n(x) = \ln(1 + x^n)$ et on pose $I_n = \int_0^1 \ln(1 + x^n) dx$.

On note C_n la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- Déterminer la limite de f_1 en $+\infty$.
 - Étudier les variations de f_1 sur $[0, +\infty[$.
 - À l'aide d'une intégration par parties, calculer I_1 et interpréter graphiquement le résultat.
(Pour le calcul de I_1 , on pourra utiliser le résultat suivant : pour tout $x \in [0, 1]$, $\frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$.)
- Montrer que pour tout entier naturel non nul n , on a $0 \leq I_n \leq \ln 2$.
 - Étudier les variations de la suite (I_n) .
 - En déduire que la suite (I_n) est convergente.
- Soit g la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $g(x) = \ln(1 + x) - x$.

 - Étudier le sens de variation de g sur $[0, +\infty[$.
 - En déduire le signe de g sur $[0, +\infty[$.

Montrer alors que pour tout entier naturel n non nul, et pour tout x réel positif, on a

$$\ln(1 + x^n) \leq x^n.$$
 - En déduire la limite de la suite (I_n) .

Exercice 2 (5 points)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration pourra consister à fournir un contre-exemple.

1. La droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = t + 2 \\ y = -2t \\ z = 3t - 1 \end{cases}, t \in \mathbf{R}$ est parallèle au plan dont une équation cartésienne est : $x + 2y + z - 3 = 0$.

2. Les plans P, P', P'' d'équations respectives $x - 2y + 3z = 3$, $2x + 3y - 2z = 6$ et $4x - y + 4z = 12$ n'ont pas de point commun.

3. Les droites de représentations paramétriques respectives $\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 1 + t \\ z = -3 + 2t \end{cases}, t \in \mathbf{R}$ et $\begin{cases} x = 7 + 2u \\ y = 2 + 2u \\ z = -6 - u \end{cases}, u \in \mathbf{R}$ sont sécantes.

4. On considère les points : A , de coordonnées $(-1, 0, 2)$, B , de coordonnées $(1, 4, 0)$, et C , de coordonnées $(3, -4, -2)$.
Le plan (ABC) a pour équation $x + z = 1$.

5. On considère les points : A , de coordonnées $(-1, 1, 3)$, B , de coordonnées $(2, 1, 0)$, et C , de coordonnées $(4, -1, 5)$.
On peut écrire C comme barycentre des points A et B .

Exercice 3 (5 points)

Commun à tous les candidats

Une urne contient 10 boules blanches et n boules rouges, n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2. On fait tirer à un joueur des boules de l'urne. À chaque tirage, toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées. Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 euros et pour chaque boule rouge tirée, il perd 3 euros.

On désigne par X la variable aléatoire correspondant au gain algébrique obtenu par le joueur.

Les trois questions de l'exercice sont indépendantes.

1. Le joueur tire deux fois successivement et sans remise une boule de l'urne.

a. Démontrer que : $P(X = -1) = \frac{20n}{(n+10)(n+9)}$.

- b. Calculer, en fonction de n , la probabilité correspondant aux deux autres valeurs prises par la variable X .

- c. Vérifier que l'espérance mathématique de la variable aléatoire X vaut :

$$E(X) = \frac{-6n^2 - 14n + 360}{(n+10)(n+9)}.$$

- d. Déterminer les valeurs de n pour lesquelles l'espérance mathématique est strictement positive.

2. Le joueur tire 20 fois successivement et avec remise une boule de l'urne. Les tirages sont indépendants.

Déterminer la valeur minimale de l'entier n afin que la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge au cours de ces 20 tirages soit strictement supérieure à 0,999.

3. On suppose que $n = 1000$. L'urne contient donc 10 boules blanches et 1000 boules rouges.

Le joueur ne sait pas que le jeu lui est complètement défavorable et décide d'effectuer plusieurs tirages sans remise jusqu'à obtenir une boule blanche.

Le nombre de boules blanches étant faible devant celui des boules rouges, on admet que l'on peut modéliser le nombre de tirages nécessaires pour obtenir une boule blanche par une variable aléatoire Z suivant la loi :

$$\text{pour tout } k \in \mathbb{N}, P(Z \leq k) = \int_0^k 0,01 e^{-0,01x} dx.$$

On répondra donc aux questions suivantes à l'aide de ce modèle.

- a. Calculer la probabilité que le joueur ait besoin de tirer au plus 50 boules pour avoir une boule blanche, soit $P(Z \leq 50)$.
- b. Calculer la probabilité conditionnelle de l'évènement : "le joueur a tiré au maximum 60 boules pour tirer une boule blanche" sachant l'évènement "le joueur a tiré plus de 50 boules pour tirer une boule blanche".

Exercice 4 (4 points)

Commun à tous les candidats

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 2$.

1. Calculer u_1 , u_2 et u_3 .

2. a. Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 4$, $u_n \geq 0$.

b. En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 5$, $u_n \geq n - 3$.

c. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

3. On définit la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = -2u_n + 3n - \frac{21}{2}$.

a. Démontrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme.

b. En déduire que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{25}{4} \left(\frac{1}{3} \right)^n + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}$.

c. Soit la somme S_n définie pour tout entier naturel n par : $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$.

Déterminer l'expression de S_n en fonction de n .

Partie A.

Supposons que sur $I=[a,b]$ on ait $f \leq g$: posons $h = g - f$.

> la fonction h est continue sur I comme différence de deux fonctions continues.

> la fonction h est positive sur I puisque $f \leq g$ sur I .

D'après le prérequis 2, on a alors $\int_a^b h \geq 0$.

D'après le prérequis 1, on a aussi $\int_a^b h = \int_a^b (g - f) = \int_a^b g - \int_a^b f$.

On a par conséquent $\int_a^b g - \int_a^b f \geq 0 \Leftrightarrow \int_a^b f \leq \int_a^b g$

Partie B.

1a. On a $f_1(x) = \ln(1+x)$. Vu que $\lim_{X \rightarrow +\infty} \ln(X) = +\infty$, par composition on obtient $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = +\infty$.

1b. f_1 dérivable sur $I = \mathbb{R}^+$ et on a $f_1'(x) = \frac{1}{1+x} > 0$: la fonction est donc croissante sur I .

1c. On a $I_1 = \int_0^1 \ln(1+x) dx$.

On a $\begin{cases} u' = 1 \\ v = \ln(1+x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = x+1 \\ v' = \frac{1}{1+x} \end{cases}$ donc une IPP donne

$$I_1 = [(x+1)\ln(x+1)]_0^1 - \int_0^1 \frac{x+1}{x+1} dx = 2\ln(2) - \int_0^1 1 dx = 2\ln(2) - [x]_0^1 = 2\ln(2) - 1.$$

Interprétation : la fonction f_1 étant continue, positive sur $[0;1]$, l'intégrale précédente correspond à l'aire géométrique du domaine compris entre la courbe, l'axe des abscisses, et les deux droites verticales d'équation $x = 0$ et $x = 1$.

2a.

> Pour tout x de $[0;1]$, on a $0 \leq x^n \leq 1$ (car la fonction puissance est croissante sur $[0;1]$),

donc $1 \leq 1+x^n \leq 2$ et par croissance de $\ln$, $0 \leq \ln(1+x^n) \leq \ln(2)$.

> L'intégration conserve l'ordre (voir prérequis) d'où $0 \leq I_n \leq \int_0^1 \ln(2) dx \Leftrightarrow 0 \leq I_n \leq \ln(2)$

2b.

> Sur $[0;1]$, on a $x^{n+1} \leq x^n$ d'où $1+x^{n+1} \leq 1+x^n$ et $\ln(1+x^{n+1}) \leq \ln(1+x^n)$ (car $\ln$ croissante)

> Par intégration sur $[0;1]$, il vient $I_{n+1} \leq I_n$ donc la suite est décroissante.

2c. D'après le 2a, la suite (I_n) est positive donc minorée et d'après le 2b elle est décroissante : par conséquent elle converge vers une limite L telle que $0 \leq L \leq \ln(2)$ (d'après le 2a).

3a. g est dérivable et on a $g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x}$ qui est du signe de $-x$ sur $\mathbb{R}^+$ donc négative : la fonction g est donc décroissante.

3b.

> On a $g(0) = 0$ et comme g décroît, la fonction g est majorée par 0 sur $\mathbb{R}^+$: la fonction g est donc négative sur $\mathbb{R}^+$.

> En résumé, pour tout X de $\mathbb{R}^+$, on a $g(X) \leq 0 \Leftrightarrow \ln(1+X) \leq X$.

Appliquons cette inégalité à $X = x^n \in \mathbb{R}^+$, il vient $\ln(1+x^n) \leq x^n$

3c. Comme l'intégration conserve l'ordre, on a par intégration $I_n \leq \int_0^1 x^n dx \Leftrightarrow I_n \leq [\frac{x^{n+1}}{n+1}]_0^1 \Leftrightarrow I_n \leq \frac{1}{n+1}$.

La suite étant déjà convergente, minorée par 0 le théorème des gendarmes nous permet de conclure que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

EXERCICE 2

1. La droite D est parallèle au plan P si son vecteur directeur (à D) est orthogonal au vecteur normal de P.

On a $\vec{u}_D \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{n}_P \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ d'où $\vec{u}_D \cdot \vec{n}_P = 1 - 4 + 3 = 0$: donc $D \parallel P$.

VRAI.

2. On peut essayer de résoudre le système formé par les 3 plans pour voir si un point satisfait à chacune des équations.

$$\begin{cases} x-2y+3z=3 \\ 2x+3y-2z=6 \\ 4x-y+4z=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y+3z=3 \\ 7y-8z=0 \quad (L_2-2L_1) \\ 7y-8z=0 \quad (L_3-4L_1) \end{cases}$$

La dernière équation devient inutile.

On constate alors qu'en prenant par exemple $y = z = 0$ et $x = 3$, le système est vérifié. Ils ont donc au moins un point en commun.

FAUX.

3. Vérifions si il existe un u et un t tel qu'un point satisfasse à chacune des équations.

$$\text{On aurait alors } \begin{cases} 7+2u=2-3t \\ 2+2u=1+t \\ -6-u=-3+2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u=-5-3t \\ -5-3t=-1+t \\ -6-u=-3+2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=-1 \\ t=-1 \\ -6-u=-3+2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=-1 \\ t=-1 \\ -5=-5 \end{cases}$$

: système avec (unique) solution.

VRAI.

4. Les coordonnées de A, B et C vérifient l'équation donnée : 3 points non alignés définissant un unique plan,

VRAI.

5. C peut s'écrire comme bary de A et B ssi il est sur la droite (AB).

$\vec{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{AC} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ ne sont visiblement pas colinéaires donc C n'est pas sur la droite (AB) et la réponse est :

FAUX.

EXERCICE 3

1a. Il existe deux façons de perdre 1€ : tirer B puis R ou tirer R puis B

Construisons un arbre pondéré :

$$\begin{aligned} P(X = -1) &= P(B, R) + P(R, B) \\ \text{On a alors} \quad &= \frac{10}{n+10} \times \frac{n}{n+9} + \frac{n}{n+10} \times \frac{10}{n+9} = \frac{20n}{(n+10)(n+9)} \end{aligned}$$

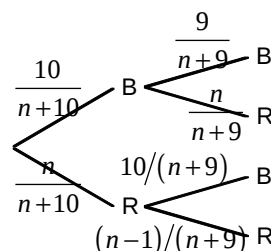
1b.

$$P(X = -6) = P(R, R)$$

$$> \text{ on a } \quad = \frac{n}{n+10} \times \frac{n-1}{n+9} = \frac{n^2 - n}{(n+10)(n+9)}$$

$$P(X = 4) = P(B, B)$$

$$> \text{ et } \quad = \frac{10}{n+10} \times \frac{9}{n+9} = \frac{90}{(n+10)(n+9)}$$



$$E(X) = (-1)P(X = -1) + (-6)P(X = -6) + 4P(X = 4)$$

$$1c. \text{ On a alors } = \dots = \frac{-6n^2 - 14n + 360}{(n+10)(n+9)}.$$

1d. Comme n est positif (nombre de boules R), $E(X)$ est du signe du trinôme $-2(3n^2 + 7n - 180) = -2\left(3n^2 + 7n - 180\right) = -2\left(n - \frac{20}{3}\right)(n+9)$ qui est positif pour $0 < n < \frac{20}{3}$ (donc au plus 6 boules R).

2. Si Y désigne la variable aléatoire qui compte le nombre de boules rouge à chaque tirage, Y suit une loi binomiale de $B(20, p = \frac{n}{n+10})$.

On cherche n tel que $P(Y \geq 1) \geq 0,999 \Leftrightarrow 1 - P(Y = 0) \geq 0,999 \Leftrightarrow P(Y = 0) \leq 0,001$.

$$\text{Mais } P(Y = 0) = \left(\frac{10}{n+10}\right)^{20} \text{ donc on cherche } n \text{ tel que } \left(\frac{10}{n+10}\right)^{20} \leq 0,001 \Leftrightarrow \frac{10}{n+10} \leq 0,001^{\frac{1}{20}} \Leftrightarrow n+10 \geq \frac{10}{0,001^{\frac{1}{20}}}.$$

La valeur minimale de n est donc 5.

$$3a. \text{ On a } P(Z \leq 50) = \int_0^{50} 0,01e^{-0,01x} dx = [-e^{-0,01x}]_0^{50} = 1 - e^{-0,01 \times 50} = 1 - e^{-0,5}.$$

$$3b. \text{ On cherche } P_{(Z \geq 50)}(Z \leq 60) = \frac{P((Z \leq 60) \cap (Z \geq 50))}{P(Z \geq 50)} = \frac{P(50 \leq Z \leq 60)}{1 - P(Z \leq 50)} = \frac{P(Z \leq 60) - P(Z \leq 50)}{1 - P(Z \leq 50)} = \frac{e^{-0,5} - e^{-0,6}}{e^{-0,5}}.$$

EXERCICE 4

$$\text{Posons } u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 2.$$

$$1. \text{ On a } u_1 = -\frac{5}{3}, u_2 = -\frac{14}{9}, u_3 = -\frac{14}{27},$$

2a. Soit n supérieur à 4 et $P(n)$: “ $u_n \geq 0$ ”.

$$> \text{ On a } u_4 = \frac{1}{3}u_3 + 1 = \frac{67}{81} \text{ le sera donc } P(4) \text{ est vraie.}$$

$$> \text{ supposons qu'au rang } n \text{ on ait } u_n \geq 0 : \text{ alors } \frac{1}{3}u_n \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}u_n + n - 2 \geq n - 2 \Leftrightarrow u_{n+1} \geq n - 2.$$

Comme $n > 3$, on a bien le résultat voulu.

2b. Nous venons de prouver que pour $u_{n+1} \geq n - 2$ cad que $u_{n+1} \geq (n+1) - 3$ soit encore $u_n \geq n - 3$.

2c. u_n est minorée par une suite qui diverge vers $+\infty$ donc d'après les théorèmes de comparaison, elle tend aussi vers $+\infty$.

$$3a. \text{ Soit } v_n = -2u_n + 3n - \frac{21}{2}.$$

$$v_{n+1} = -2u_{n+1} + 3(n+1) - \frac{21}{2} = -2\left(\frac{1}{3}u_n + n - 2\right) + 3n - \frac{15}{2} = -\frac{2}{3}u_n + n - \frac{7}{2} = \frac{1}{3}\left(-2u_n + 3n - \frac{21}{2}\right) \text{ et on a donc } v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n, \text{ suite}$$

géométrique de raison $1/3$ et de premier terme $v_0 = -\frac{25}{2}$

$$3b. \text{ On a donc } v_n = v_0 \left(\frac{1}{3}\right)^n \text{ et comme } v_n = -2u_n + 3n - \frac{21}{2} \Leftrightarrow u_n = -\frac{1}{2}v_n + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}, \text{ on obtient}$$

$$u_n = -\frac{1}{2}v_0 \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4} = \frac{25}{4} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}$$

3c.

Séparons les trois termes à la sommation :

$$> A = \sum_{k=0}^n \frac{25}{4} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{25}{4} \times \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{25}{4} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}}.$$

$$> B = \sum_{k=0}^n \frac{3}{2} k = \frac{3}{2} \times \sum_{k=0}^n k = \frac{3}{2} \times \frac{n(n+1)}{2}$$

$$> C = \sum_{k=0}^n -\frac{21}{4} = -\frac{21}{4} \times \sum_{k=0}^n 1 = -\frac{21}{4} \times (n+1)$$

La somme cherchée est alors $A + B + C$! ouf !!