Corrigé Nouvelle–Calédonie série S mars 2009

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

1. **a.** L'écriture complexe de cette rotation est $z' - z_A = e^{i\frac{2\pi}{3}}(z - z_A)$.
Pour $z = z_B$, on obtient donc :

$$z' = 1 + e^{i\frac{2\pi}{3}}(3+4i-1) = 1 + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(2+4i) = \ldots = z_D.$$

L'image du point B est bien le point D.

b. Comme A est le centre d'une rotation qui transforme B en D, B et D sont sur un même cercle de centre A ; le rayon est AB.
$AB = |2+4i| = \sqrt{2^2+4^2} = 2\sqrt{5}$.

2. **a.** L'écriture complexe de cette homothétie est $z' - z_B = \frac{3}{2}(z - z_B)$.

Pour $z = z_A$, on obtient donc : $z_F = 3 + 4i + \frac{3}{2}(1-3-4i) = -2i$.

b. Calculons l'affixe du milieu de [CD] : $\frac{z_C + z_D}{2} = \cdots = -2i$, on trouve bien z_F !

c. $\frac{z_C - z_F}{z_A - z_F} = \frac{2\sqrt{3} + i(-2-\sqrt{3}) + 2i}{1+2i} = \frac{2\sqrt{3} - i\sqrt{3}}{1+2i} = \sqrt{3}\frac{(2-i)(1-2i)}{5} = \sqrt{3}\frac{-5i}{5} = -i\sqrt{3}$.

En écrivant les modules et arguments, on obtient donc la forme exponentielle :

$$\frac{z_C - z_F}{z_A - z_F} = \sqrt{3}e^{-\frac{\pi}{2}}.$$

Mais $\arg\left(\frac{z_C - z_F}{z_A - z_F}\right) = (\overrightarrow{FA}, \overrightarrow{FC}) = -\frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$.

Les droites (FA) et (FC) sont donc orthogonales en F ; comme on a déjà vu que F est le milieu de [DC], (AF) est bien la médiatrice de [DC].

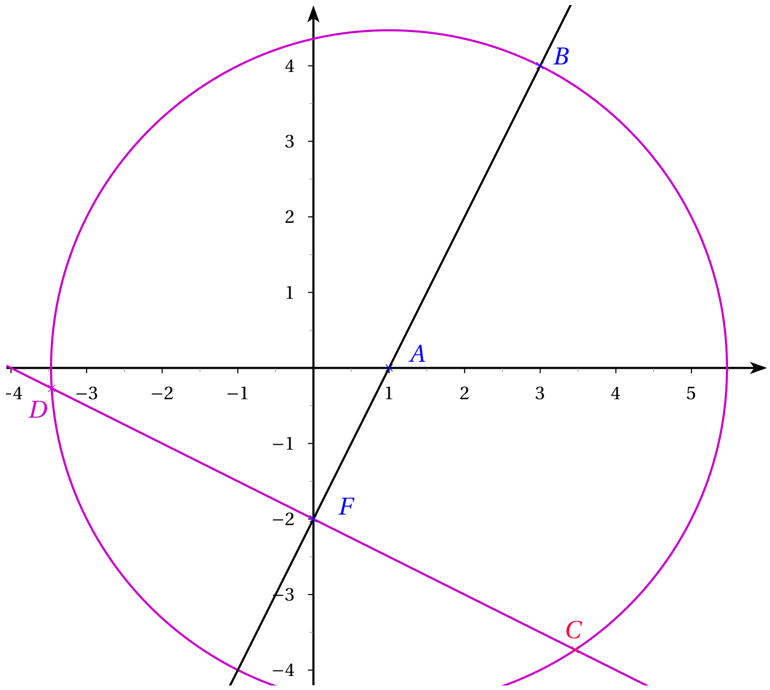
3. D'après la question 1°) :

– D appartient au cercle de centre A qui passe par B (1. b.).

– $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{2\pi}{3}$: D appartient à la perpendiculaire à (AB) passant par F (voir la définition de F).

Choisir pour D celui des deux points d'intersection de la droite et du cercle pour lequel l'angle est le bon !

Enfin, C est le symétrique de D par rapport à F (ou l'autre point d'intersection).



EXERCICE 2 **5 points**

1. **a.** Les trois points A, B et C sont deux à deux distincts, $\overrightarrow{AB}\ (-4, 2, 0)$ et $\overrightarrow{AC}\ (-4, 0, 3)$ ne sont pas colinéaires ($\dfrac{-4}{-4} \neq \dfrac{0}{3}$). A, B et C déterminent donc bien un plan.

b. On montre que $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à deux vecteurs directeurs non colinéaires du plan (ABC). Nous choisissons bien entendu les deux vecteurs du 1a.

$\overrightarrow{n} \bullet \overrightarrow{AB} = -12 + 12 = 0$ et $\overrightarrow{n} \bullet \overrightarrow{AC} = 0$. $\overrightarrow{n}$ est bien normal à (ABC).

c. Comme $\overrightarrow{n}$ est normal à (ABC), une équation cartésienne de (ABC) est de la forme $3x + 6y + 4z + d = 0$.

Comme, de plus, A appartient au plan, ses coordonnées doivent vérifier l'équation précédente : $12 + d = 0$. D'où le résultat.

d. On applique la formule rappelée plus haut :

$$\delta_{\text{E}} = \frac{\left|2 - 4 + \frac{4}{9} - 12\right|}{\sqrt{3^2 + 6^2 + 4^2}} = \frac{122}{9\sqrt{61}} = \frac{2\sqrt{61}}{9}$$

2. **a.** $\overrightarrow{u}$ le vecteur de coordonnées $(1\,;\,2\,;\,4/3)$ est directeur de $(\mathscr{D})$ et $\overrightarrow{n}$ est normal à (ABC).

Or, on vérifie aisément ($\dfrac{3}{1} = \dfrac{6}{2} = \dfrac{4}{\frac{4}{3}}$) que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{n}$ sont colinéaires, donc $(\mathscr{D})$ est orthogonale à (ABC).

De plus, si $t = \dfrac{-1}{3}$ dans la représentation paramétrique de $(\mathscr{D})$, on retrouve les coordonnées de E, donc $(\mathscr{D})$ passe par E.

b. D'après la question précédente, le projeté orthogonal de E sur (ABC) est le point d'intersection de $(\mathscr{D})$ et (ABC).

Notons $(x,\ y,\ z)$ les coordonnées de G.

$$\left\{\begin{array}{lcr} x & = & 1+t \\ y & = & 2t \\ z & = & \dfrac{5}{9}+\dfrac{4}{3}t \\ 3x+6y+4z-12 & = & 0 \end{array}\right. \iff$$

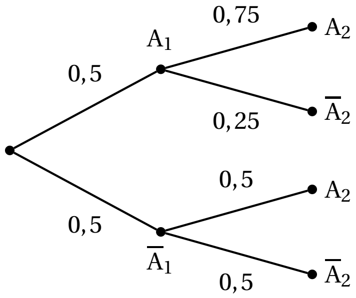
$$\left\{\begin{array}{lcr} x & = & 1+t \\ y & = & 2t \\ z & = & \frac{5}{9}+\frac{4}{3}t \\ 3(1+t)+12t+4\left(\frac{5}{9}+\frac{4}{3}\right)t-12 & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x & = & \frac{4}{3} \\ y & = & \frac{2}{3} \\ z & = & 1 \\ t & = & \frac{1}{3} \end{array}\right.$$

G a pour coordonnées $\left(\dfrac{4}{3}, \dfrac{2}{3}, 1\right)$.

c. $\delta_{\mathrm{E}} = GE = \sqrt{\dfrac{4}{9}+\dfrac{16}{9}+\dfrac{64}{81}} = \sqrt{\dfrac{244}{81}} = \dfrac{2\sqrt{61}}{9}$. Ouf! On retrouve la même valeur que dans le 1. b. !

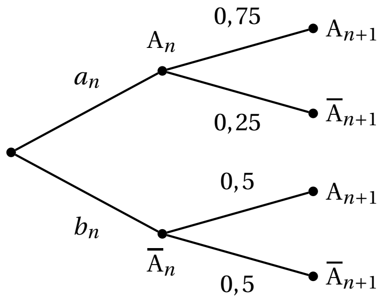
EXERCICE 3 **5 points**

1. $a_1 = \dfrac{1}{2}$ et $b_1 = 1 - a_1 = \dfrac{1}{2}$



Avec la formule des probabilités totales : $p(\mathrm{A}_2) = p(\mathrm{A}_2 \cap \mathrm{A}_1) + p(\mathrm{A}_2 \cap \overline{\mathrm{A}_1})$ donc $a_2 = a_1 \times \dfrac{3}{4} + b_1 \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{8}$ et $b_2 = 1 - a_2 = \dfrac{3}{8}$

2. On refait un arbre et on utilise encore la formule des probabilités totales :



$a_{n+1} = p(\mathrm{A}_{n+1}) = p(\mathrm{A}_{n+1} \cap \mathrm{A}_n) + p(\mathrm{A}_{n+1} \cap \overline{\mathrm{A}_n}) = \dfrac{3}{4}a_n + \dfrac{1}{2}b_n = \dfrac{3}{4}a_n + \dfrac{1}{2}(1-a_n) = \dfrac{1}{4}a_n + \dfrac{1}{2}$

3. Soit (U_n) la suite définie pour tout entier naturel n non nul, par $U_n = a_n - \dfrac{2}{3}$.

a. $U_{n+1} = a_{n+1} - \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{4}a_n + \dfrac{1}{2} - \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{4}a_n - \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{4}U_n$.

Par définition, (U_n) est donc géométrique de raison $\dfrac{1}{4}$ et de premier terme $U_1 = -\dfrac{1}{6}$.

b. On en déduit $U_n = -\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$ puis $a_n = \dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{6}\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$.

c. $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$ est le terme général d'une suite géométrique dont la raison est strictement comprise entre -1 et 1, elle converge donc vers 0. On en déduit que (a_n) converge vers $\dfrac{2}{3}$.

d. $a_n \geqslant 0{,}6665 \iff \dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{6}\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1} \geqslant 0{,}6665 \iff 6\left(\dfrac{2}{3} - 0,6665\right) \geqslant \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1} \iff$
$\ln\left(6\left(\dfrac{2}{3} - 0,6665\right)\right) \geqslant (n-1)\ln\left(\dfrac{1}{4}\right)$

On obtient finalement : $n \geqslant 1 + \dfrac{4 - 6 \times 0,6665}{\ln \dfrac{1}{4}} \geq 5,98$.

Le plus petit entier naturel n tel que : $a_n \geqslant 0{,}6665$ est donc 6.

EXERCICE 4 **6 points**

Commun à tous les candidats

1. **a.** Comme la fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$, $f(x)$ est du signe de $x+1$, donc négative si $x < -1$, positive si $x > -1$ et s'annule pour $x = -1$.

b. $\left\{\begin{array}{lcl} \displaystyle\lim_{x \to -\infty} -x & = & +\infty \\ \displaystyle\lim_{X \to +\infty} \mathrm{e}^X & = & +\infty \end{array}\right\} \overset{\text{par composition}}{\Longrightarrow} \left\{\begin{array}{lcl} \displaystyle\lim_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{-x} & = & +\infty \\ \displaystyle\lim_{x \to -\infty} (1+x) & = & -\infty \end{array}\right\} \overset{\text{par produit}}{\Longrightarrow}$

$\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

Si on reprend le schéma précédent en $+\infty$, on obtient la forme indéterminée « $+\infty \times 0$ ». Pour lever l'indétermination, on développe :

$f(x) = \mathrm{e}^{-x} + \dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$ et on retrouve une limite du cours !

Réponse : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

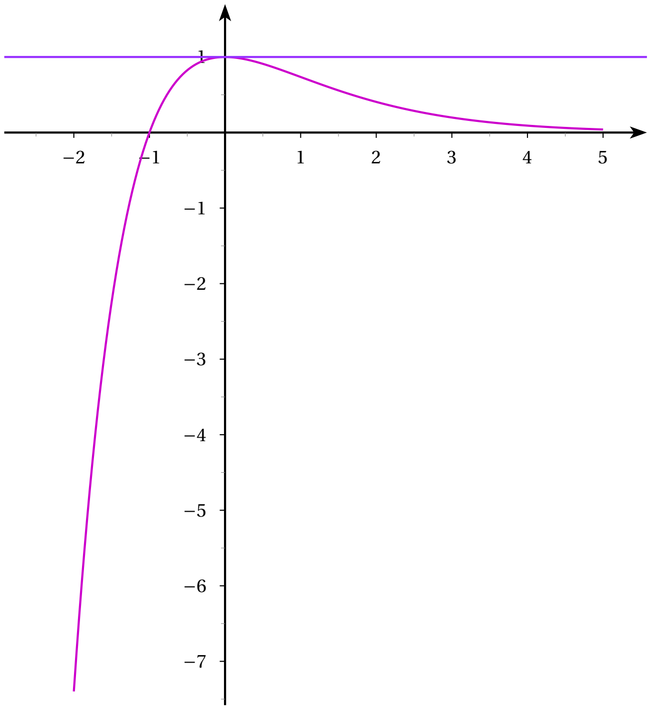
c. f est obtenue par composition et produit de fonctions usuelles, f est donc bien dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \mathrm{e}^{-x} - (1+x)\mathrm{e}^{-x} = -x\mathrm{e}^{-x}$

$f'(x)$ est donc du signe contraire de x et f est strictement croissante sur $]-\infty; 0]$ et strictement décroissante sur $[0; +\infty[$.

Comme la dérivée s'annule une seule fois et en changeant de signe (+ ; -) en 0, $f(0) = 1$ est un maximum pour f sur $\mathbb{R}$.

d. Penser aux éléments caractéristiques de la courbe qui ont été rencontrés dans l'étude et notamment la tangente « horizontale » au point d'abscisse 0.



2. **a.** $\forall n \in \mathbb{N}, -1 < n$ et $f(x) \geqslant 0$ sur $[-1\ ;\ n]$ d'après la question 1. a.
On intègre donc une fonction positive avec les bornes dans le « bon » ordre, donc pour tout $n \in \mathbb{N} : I_n \geqslant 0$.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N} : I_{n+1} - I_n = \displaystyle\int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$ pour les mêmes raisons que dans la question précédente !

3. **a.** On pose : $\left\{\begin{array}{lcll} u(x) & = & 1+x & u'(x) = 1 \\ v'(x) & = & \mathrm{e}^{-x} & v(x) = -\mathrm{e}^{-x}\end{array}\right.$

Les 4 fonctions $u, u',\ v$ et v' sont toutes continues sur $[a\ ;\ b]$, on peut donc intégrer par parties :

$\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \left[-(1+x)\mathrm{e}^{-x}\right]_a^b - \int_a^b -\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = (1+a)\mathrm{e}^{-a} - (1+b)\mathrm{e}^{-b} - \left[\mathrm{e}^{-x}\right]_a^b =$
$(-2-b)\mathrm{e}^{-b} + (2+a)\mathrm{e}^{-a}$.

b. On utilise la question précédente avec $a = -1$ et $b = n$,
$I_n = (-2-n)\mathrm{e}^{-n} + \mathrm{e} = -2\mathrm{e}^{-n} - \dfrac{n}{\mathrm{e}^n} + \mathrm{e}$.

c. Avec les mêmes arguments que dans la question 1. b., on trouve
$\displaystyle\lim_{n \to +\infty} I_n = \mathrm{e}$.

d. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x)$ est positive sur $[-1\ ;\ n]$, donc I_n mesure l'aire du domaine limité par les droites d'équations $x = -1$, $x = n$, l'axe des abscisses et la courbe représentative de f. Cette limite signifie que cette aire a pour limite e quand n tend vers $+\infty$.

4. On utilise la question 3. a. en posant $a = -1$ et $b = \alpha$.
$\displaystyle\int_{-1}^{\alpha} f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e} \iff (-2-\alpha)\mathrm{e}^{-\alpha} + \mathrm{e} = \mathrm{e} \iff \alpha = -2$
Ce calcul intégral correspond à un calcul d'aire :
Sur $[-2; -1]$, $f(x) \leqslant 0$,
l'aire du domaine limité par les droites d'équations $x = -2$, $x = -1$, l'axe des abscisses et la courbe est donc

$$-\int_{-2}^{-1} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{-2} f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}$$