<u>Exercice 1</u> (5 points) *Commun à tous les candidats*

1) a) Les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto \ln x$ sont dérivables sur $]0 ; +\infty[$ donc par produits de fonctions dérivables la fonction $x \mapsto x \ln x$ est dérivable sur $]0 ; +\infty[$.

Par différence de fonctions dérivables la fonction F est dérivable sur $]0 ; +\infty[$.

Pour tout x de $]0 ; +\infty[$ on a :

$$F'(x) = 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1$$
$$F'(x) = \ln x$$

Donc F est une primitive de la fonction logarithme népérien sur] 0 ; + ∞[.

Calcul de I :

$$I = \int_1^e \ln x\,dx$$
$$I = [F(x)]_1^e$$
$$I = e(\ln e) - e - \ln 1 + 1$$

Donc : $I = 1$

b) $J = \int_1^e (\ln x)^2\,dx$

Posons $u(x) = (\ln x)^2$ et $v'(x) = 1$

$u'(x) = 2 \times \frac{1}{x} \times \ln x$ et $v(x) = x$

Par intégration par partie :

$$J = \left[x(\ln x)^2\right]_1^e - \int_1^e 2\ln x\,dx$$
$$J = \left[e(\ln e)^2 - (\ln 1)^2\right] - 2\int_1^e \ln x\,dx$$

$J = e - 2I$

c) Comme $J = e - 2I$ et $I = 1$ on a donc : **$J = e - 2$**

d) On a : $f(x) - g(x) = \ln x - (\ln x)^2 = \ln x(1 - \ln x)$

Sur $[1 ; e]$, $\ln x > 0$ et $1 - \ln x > 0$ (car $0 < \ln x < 1$ sur $[1 ; e]$)

donc $f(x) - g(x) > 0$

donc sur $[1 : e]$, C_f est au dessus de C_g.

L'aire A (en unité d'aire) est l'aire de la partie du plan délimitée par les courbes C_f, C_g et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$. Donc A est égale à :

$$A = \int_1^e [f(x) - g(x)]\,dx$$
$$A = \int_1^e \left[\ln x - (\ln x)^2\right]dx$$
$$A = \int_1^e \ln x\,dx - \int_1^e (\ln x)^2\,dx$$
$$A = I - J$$

$A = 3 - e$

2) Les coordonnées de M et N sont : M(x, f(x)) et N(x, g(x)) avec $x \in [1 ; e]$

La distance MN vaut : $MN = \sqrt{(x - x)^2 + (f(x) - g(x))^2}$

$= \sqrt{(f(x) - g(x))^2}$

Or sur [1 ; e], $f(x) - g(x) > 0$

Donc $MN = f(x) - g(x)$

$\mathbf{MN = \ln x(1 - \ln x)}$

Soit la fonction h définie sur [1 ; e] par $h(x) = \ln x(1 - \ln x)$.

Etudions la fonction h :

Sur [1 ; e] h est dérivable et sa dérivée vaut :

$$h'(x) = \frac{1}{x}(1 - \ln x) - \ln x \times \frac{1}{x}$$

$$h'(x) = \frac{1 - 2\ln x}{x}$$

Sur [1 ; e] , x > 0 donc h'(x) a le même signe que 1 – 2 ln x.

$h'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - 2\ln x = 0$

$\Leftrightarrow \ln x = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x = e^{1/2}$

$h'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - 2\ln x > 0$

$\Leftrightarrow \ln x < \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x < e^{1/2}$

Donc :

Sur $[1 ; e^{1/2}[$, h'(x) est positive donc h est croissante

Sur $[e^{1/2} ; e[$, h'(x) est négative donc h est décroissante.

La fonction h admet donc un maximum en $e^{1/2}$.

La distance MN est donc maximale pour x = $e^{1/2}$ et vaut :

$$MN_{max} = \ln e^{1/2} \times (1 - \ln e^{1/2}) \qquad \ln e^{1/2} = \frac{1}{2}$$

$$MN_{max} = \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right)$$

$$\mathbf{MN_{max} = \frac{1}{4}}$$

www.2amath.fr

<u>Exercice 2</u> (5 points) *Commun à tous les candidats*

1. **a)** $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées (0 ;1 ;1) et $\overrightarrow{BC}$ a pour coordonnées (2 ; – 3 ; 1)

$\frac{0}{2} \neq \frac{1}{-3}$ donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ ne sont pas colinéaires. D'où **A, B et C ne sont pas alignés**.

b) Le plan (ABC) a pour équation cartésienne une équation de la forme :
ax + by + cz + d = 0

Or A, B et C appartiennent au plan (ABC), donc : $\begin{cases} a + b + d = 0 \\ a + 2b + c + d = 0 \\ 3a - b + 2c + d = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} a = -b - d \\ -b - d + 2b + c + d = 0 \\ -3b - 3d - b + 2c + d = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -b - d \\ b + c = 0 \\ -4b + 2c - 2d = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -b - d \\ c = -b \\ -4b - 2b - 2d = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -\frac{2}{3}d \\ c = \frac{1}{3}d \\ b = -\frac{1}{3}d \end{cases}$$

On choisit : d = – 3 d'où : a = 2 ; b = 1 ; c = – 1
Et **une équation de (ABC) est : 2x + y – z – 3 = 0**

2. $\begin{cases} x + 2y - z - 4 = 0 \\ 2x + 3y - 2z - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y + z + 4 \\ 2(-2y + z + 4) + 3y - 2z - 5 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y + z + 4 \\ -y + 3 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 + z \\ y = 3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 + t \\ y = 3 \\ z = t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$

Donc **l'intersection de (P) et (Q) est une droite d'équation paramétrique :**

$$\boldsymbol{\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 3 \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})}$$

3. $\begin{cases} 2x + y - z - 3 = 0 \\ x = -2 + t \\ y = 3 \\ z = t \end{cases} (t \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} 2(-2 + t) + 3 - t - 3 = 0 \\ x = -2 + t \\ y = 3 \\ z = t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} t = 4 \\ x = 2 \\ y = 3 \\ z = 4 \end{cases}$$

L'intersection des plans (ABC), (P) et (Q) est le point de coordonnées (2 ; 3 ; 4)

4. Un vecteur directeur de (D) est : $\vec{u}$ de coordonnées (1 ; 0 ; 1)

Soit A'(x' ; y' ; z') le point de (D) tel que (AA') est perpendiculaire à (D).

On a donc : $\overrightarrow{AA'}$ est orthogonal à $\vec{u}$, c'est à dire : $\overrightarrow{AA'} \cdot \vec{u} = 0$

$$\overrightarrow{AA'} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow (x' - 1) \times 1 + (y' - 1) \times 0 + (z' - 0) \times 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow x' - 1 + z' = 0$$

De plus, A' est un point de (D), donc ses coordonnées vérifient :

$$\begin{cases} x' - 1 + z' = 0 \\ x' = -2 + t \\ y' = 3 \\ z' = t \end{cases} (t \in \mathbb{R}) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -2 + t - 1 + t = 0 \\ x' = -2 + t \\ y' = 3 \\ z' = t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} t = \frac{3}{2} \\ x' = -\frac{1}{2} \\ y' = 3 \\ z' = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Donc : A' a pour coordonnées $(-\frac{1}{2} ; 3 ; \frac{3}{2})$

D'où $AA' = \sqrt{(-\frac{1}{2} - 1)^2 + (3 - 1)^2 + (\frac{3}{2} - 0)^2}$

$AA' = \frac{\sqrt{34}}{2}$ ou $\sqrt{\frac{17}{2}}$

La distance de A à la droite (D) est égale à $\frac{\sqrt{34}}{2}$

www.2amath.fr

<u>Exercice 3</u> (5 points) *Commun à tous les candidats*

Pour tout $t \geq 0$, $P(X \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}dx$.

$R(t) = P(X > t)$ est appelée fonction de fiabilité.

1) Restitution organisée de connaissances

a) Soit $t \geq 0$,

$R(t) = P(x > t)$

$R(t) = 1 - P(x \leq t)$

$R(t) = 1 - \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}dx$

$R(t) = 1 - \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^t$

$R(t) = 1 - (-e^{-\lambda t} + e^0)$

$R(t) = 1 + e^{-\lambda t} - 1$

$R(t) = e^{-\lambda t}$

On a démontrer que **pour tout $t \geq 0$ on a $R(t) = e^{-\lambda t}$.**

b) Soit s un réel supérieur ou égal à 0 ($s \geq 0$) et soit un nombre t tel que $t \geq 0$.

$P_{x>t}(X > t + s) = \dfrac{P(X > t \cap X > t + s)}{P(X > t)}$

$P_{x>t}(X > t + s) = \dfrac{P(X > t + s)}{P(X > t)}$

car $(X > t)$ est inclus dans $(X > t + s)$ donc $(X > t) \cap (X > t + s) = (X > t + s)$

$P_{x>t}(X > t + s) = \dfrac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}}$ d'après la question précédente.

$P_{x>t}(X > t + s) = \dfrac{e^{-\lambda t} \times e^{-\lambda s}}{e^{-\lambda t}}$

$P_{x>t}(X > t + s) = e^{-\lambda s}$ et $e^{-\lambda s}$ ne dépend pas de t.

La variable X suit une loi de durée de vie sans vieillissement, c'est-à-dire que pour tout réel $s \geq 0$, la probabilité conditionnelle $P_{x>t}(X > t + s)$ ne dépend pas du nombre $t \geq 0$.

2) $\lambda = 0{,}00026$.

a) $P(X \leq 1000) = 1 - R(1000)$

$P(X \leq 1000) = 1 - e^{-0{,}00026 \times 1000}$

$\mathbf{P(X \leq 1000) = 1 - e^{-0{,}26}}$

$P(X \leq 1000) \approx 0{,}23$

$P(X > 1000) = R(1000)$

$\mathbf{P(X > 1000) = e^{-0{,}26}}$

$P(X > 1000) \approx 0{,}77$

www.2amath.fr

b) Sachant que l'événement (X > 1000) est réalisé, la probabilité de l'événement (X > 2000) est donnée par $P_{x>1000}(X > 2000)$.

$P_{X>1000}(X > 2000) = P_{X>1000}(X > 1000 + 1000)$
$P_{X>1000}(X > 2000) = e^{-0,00026 \times 1\,000}$ d'après **1) b).**
$\mathbf{P_{X>1000}(X > 2000) = e^{-0,26}}$

c) Sachant qu'un agenda a fonctionné plus de 2000 heures, la probabilité qu'il tombe en panne avant 3000 heures est donnée par $P_{X>2000}(X \leq 3000)$

$$P_{X>2000}(X \leq 3000) = \frac{P(X > 2000 \cap X \leq 3000)}{P(X > 2000)}$$
$$P_{X>2000}(X \leq 3000) = \frac{P(2000 < X \leq 3000)}{P(X > 2000)}$$
$$P_{X>2000}(X \leq 3000) = \frac{\left[-e^{-\lambda x}\right]_{2000}^{3000}}{e^{-2000\lambda}}$$
$$P_{X>2000}(X \leq 3000) = \frac{-e^{-3000\lambda} + e^{-2000\lambda}}{e^{-2000\lambda}}$$
$$P_{X>2000}(X \leq 3000) = 1 - e^{-1000\lambda}$$
$$P_{X>2000}(X \leq 3000) = P(X \leq 1000)$$
$$\mathbf{P_{X>2000}(X \leq 3000) = 1 - e^{-0,26}} \approx 0,23.$$

On pouvait prévoir ce résultat car X suit une loi de durée de vie sans vieillissement.

www.2amath.fr

Exercice 4 : (5 points) *Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité*

1) Voir figure en fin d'exercice

2) Affixe $z_{A'}$ de A' :

$z_{A'} = (1 + i)^2 - 4(1 + i)$

$z_{A'} = 1 + 2i + i^2 - 4 - 4i$

$\mathbf{z_{A'} = -4 - 2i}$

Affixe $z_{B'}$ de B' :

$z_{B'} = (3 - i)^2 - 4(3 - i)$

$z_{B'} = 9 - 6i + i^2 - 12 + 4i$

$\mathbf{z_{B'} = -4 - 2i}$

On remarque que $z_{A'} = z_{B'}$, les points A' et B' sont confondus.

3) Résolvons l'équation $z' = -5$

$z' = -5 \iff z^2 - 4z = -5$

$\iff z^2 - 4z + 5 = 0$

$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 5 = -4 = (2i)^2$

2 solutions complexes conjuguées

$z_1 = \dfrac{4 + 2i}{2} = 2 + i$ et $z_2 = \overline{z_1} = 2 - i$

Les points qui ont pour image le point d'affixe – 5 sont les points d'affixes : 2 + i et 2 – i.

4) a) Pour tout nombre complexe z, on a :

$z' + 4 = z^2 - 4z + 4$

$= z^2 - 2 \times 2 \times z + 2^2$

$= (z - 2)^2$ $\quad a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

Pour tout nombre complexe z, on a : $z' + 4 = (z - 2)^2$.

b) Pour tout nombre complexe z, on a : $z' + 4 = (z - 2)^2$.

Donc $|z' + 4| = |(z - 2)^2|$

$\mathbf{|z' + 4| = |z - 2|^2}$ $\quad |z^n| = |z|^n$

On a aussi pour $z \neq 2$ $\quad \arg(z' + 4) = \arg(z - 2)^2\ [2\pi]$

$\mathbf{\arg(z' + 4) = 2\arg(z - 2)\ [2\pi]}$ $\quad \arg z^n = n \arg z$

c) Lorsque M décrit le cercle *C* de centre I et de rayon 2 on a IM = 2

$IM = 2 \iff |z - 2| = 2$

$\iff |z - 2|^2 = 4$

$\iff |z' + 4| = 4$

$\iff JM' = 4$ avec J le point d'affixe – 4

$\iff$ **M' décrit le cercle C' de centre J et de rayon 4**

5) a) IE = $\left|2 + 2\,e^{i\frac{\pi}{3}} - 2\right|$

IE = $\left|2e^{i\frac{\pi}{3}}\right|$

IE = 2 car $\left|e^{i\frac{\pi}{3}}\right| = 1$

L'affixe du vecteur $\overrightarrow{IE}$ est : $2 + 2e^{i\frac{\pi}{3}} - 2$ soit $2e^{i\frac{\pi}{3}}$

Donc $(\vec{u}\,;\,\overrightarrow{IE}) = \arg\left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right) = \boldsymbol{\frac{\pi}{3}\ [2\pi]}$

b) Distance JE' :

JE' = $|z_{E'} + 4|$

JE' = $|z_E - 2|^2$ car $|z' + 4| = |z - 2|^2$

JE' = $\left|2e^{i\frac{\pi}{3}}\right|^2$

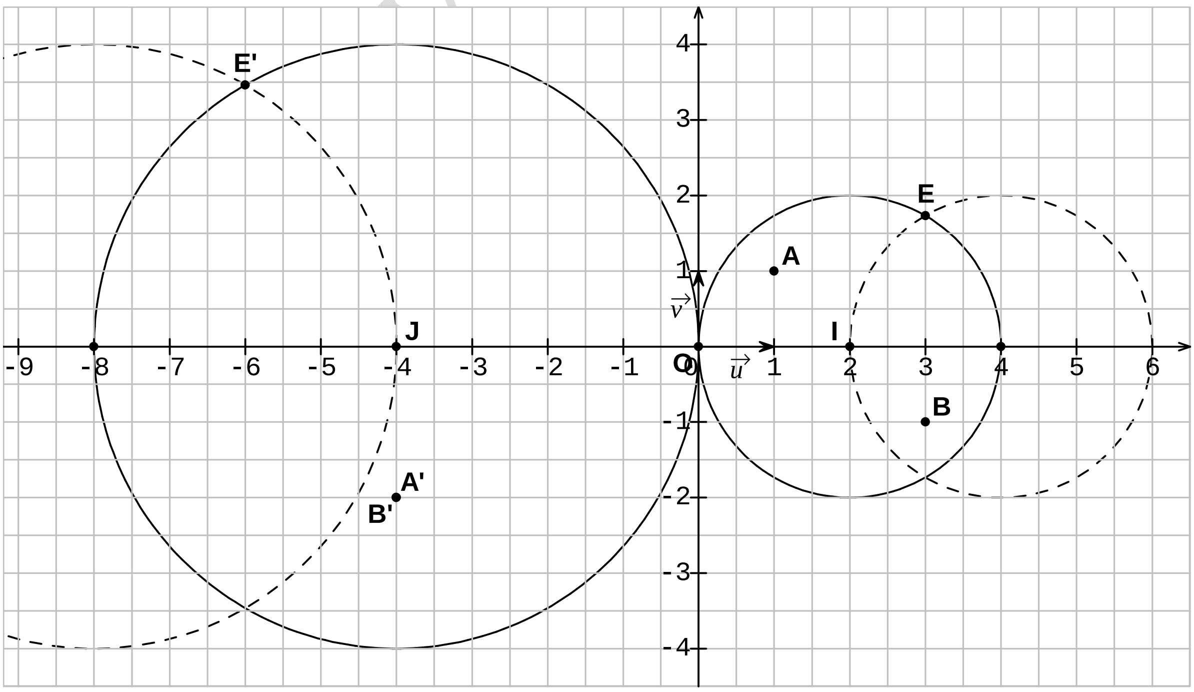
JE' = $\left|4\,e^{i\frac{2\pi}{3}}\right|$

JE' = 4 car $\left|e^{i\frac{2\pi}{3}}\right| = 1$

L'affixe du vecteur $\overrightarrow{JE'}$ est : $-4 + 4\,e^{i\frac{2\pi}{3}} + 4$ soit $4\,e^{i\frac{2\pi}{3}}$

Donc $(\vec{u}\,;\,\overrightarrow{JE'}) = \arg\left(4\,e^{i\frac{2\pi}{3}}\right) = \boldsymbol{\frac{2\pi}{3}[2\pi]}$

c) Voir figure



Exercice 4 : (5 points) *Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité*

Soient A et B les points d'affixes respectives $z_A = 1 - i$ et $z_B = 7 + \frac{7}{2}i$.

1) On considère la droite (d) d'équation $4x + 3y = 1$.

Les points M_k sont des points de la droite (d) car : $4(3k + 1) + 3(-4k - 1) = 1$

Réciproquement : Soit (x ; y) les coordonnées d'un point de la droite (d) telles que x et y soient des entiers.
Le point de coordonnées (1 ; – 1) appartient à la droite (d) car : $4 \times 1 + 3 \times (-1) = 1$
D'où : $4x + 3y = 4 \times 1 + 3 \times (-1)$
$4(x - 1) = 3(-y - 1)$
Or 4 et 3 sont premiers entre eux, donc : 4 divise $(-y - 1)$ et 3 divise $(x - 1)$
Il existe donc un entier k tel que : $-y - 1 = 4k$ et $x - 1 = 3k$
$y = -4k - 1$ et $x = 3k + 1$
D'où : tout point de la droite (d) est un point de l'ensemble des points $M_k(3k + 1 , -4k - 1)$ lorsque k décrit l'ensemble des entiers relatifs.
Donc l'ensemble des points de (d) dont les coordonnées sont entières est l'ensemble des points $M_k(3k + 1 , -4k - 1)$ lorsque k décrit l'ensemble des entiers relatifs.

2) Les similitudes directes de centre A ont pour écriture complexe :
$z' = k\,e^{i\alpha}(z - 1 + i) + 1 - i$
avec k rapport de la similitude (réel positif) et α angle de la similitude

De plus : si l'image de B est M_{-1} : $-2 + 3i = ke^{i\alpha}(7 + \frac{7}{2}i - 1 + i) + 1 - i$

$$-3 + 4i = ke^{i\alpha}(6 + \frac{9}{2}i)$$

$$ke^{i\alpha} = \frac{(-3 + 4i)(6 - \frac{9}{2}i)}{(6 + \frac{9}{2}i)(6 - \frac{9}{2}i)}$$

$$ke^{i\alpha} = \frac{\frac{75}{2}i}{\frac{225}{4}}$$

$$ke^{i\alpha} = \frac{2}{3}i$$

$$ke^{i\alpha} = \frac{2}{3}e^{i\pi/2}$$

La similitude directe de centre A qui transforme B en M_{-1} a pour **rapport $\frac{2}{3}$ et angle $\frac{\pi}{2}$**

3) Soit s la transformation du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe

$z' = \frac{2}{3} i z + \frac{1}{3} - \frac{5}{3} i.$

L'affixe de l'image de A par s est : $z' = \frac{2}{3} i (1 - i) + \frac{1}{3} - \frac{5}{3} i$

$z' = \frac{2}{3} i + \frac{2}{3} + \frac{1}{3} - \frac{5}{3} i$

$z' = 1 - i$

Donc **l'image de A par s est A**.
Donc A est un point invariant par s.

On a : $z' - (1 - i) = \frac{2}{3} i z + \frac{1}{3} - \frac{5}{3} i - (1 - i)$

$z' - (1 - i) = \frac{2}{3} i z - \frac{2}{3} - \frac{2}{3} i$

$z' - (1 - i) = \frac{2}{3} i (z - 1 + i)$

$z' - z_A = \frac{2}{3} e^{i\pi/2} (z - z_A)$

s est donc la similitude directe de centre A, de rapport $\frac{2}{3}$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$

4) On note B_1 l'image de B par s et pour tout entier naturel n non nul, B_{n+1} l'image de B_n par s.

a) Par s, l'image de A est A et l'image de B_n est B_{n+1}.
Or les similitudes multiplient les longueurs par leur rapport k.
D'où : $\mathbf{AB_{n+1} = \frac{2}{3} AB_n}$.

b) On en déduit donc que : $AB_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n AB$

Or : $AB = \left| 7 + \frac{7}{2} i - 1 + i \right|$

$AB = \left| 6 + \frac{9}{2} i \right|$

$AB = \sqrt{36 + \frac{81}{4}}$

$AB = \frac{15}{2}$

Le point B_n appartient au disque de centre A et de rayon 10^{-2} si : $AB_n \leq \frac{1}{100}$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^n \times \frac{15}{2} \leq \frac{1}{100}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^n \leq \frac{1}{100} \times \frac{2}{15}$$

$$n \ln \frac{2}{3} \leq \ln \frac{1}{750}$$

Or $\ln\frac{2}{3} < 0$, donc : $n \geq \frac{-\ln 750}{\ln \frac{2}{3}}$

$\frac{-\ln 750}{\ln \frac{2}{3}} \approx 16,3$

Donc **le point B_n appartient au disque de centre A et de rayon 10^{-2} pour $n \geq 17$**.

c) B_{n+1} est l'image de B_n par s et donc B_{n+2} est l'image de B_n par $s \circ s$.

s est une similitude de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$, donc : $s \circ s$ est une similitude directe de centre A et angle π,

d'où B_{n+2} , A et B_n sont alignés pour tout entier naturel non nul n.

Donc l'ensemble des entiers n pour lesquels A, B_1 et B_n sont alignés est l'ensemble des entiers impairs.

www.2amath.fr