

Corrigé du baccalauréat S Pondichéry 12 avril 2007

EXERCICE 1

4 points

Commun à tous les candidats

1. a. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ont pour coordonnées $\overrightarrow{AB}(-2; 0; -2)$ et $\overrightarrow{AC}(1; -4; -1)$. Ils ne sont manifestement pas colinéaires. Conclusion : les trois points A, B et C définissent un plan.
- b. $A \in \mathcal{P} \iff 2 \times 3 + 2 - 2 \times 6 + 4 = 0$ est vrai;
 $B \in \mathcal{P} \iff 2 \times 1 + 2 - 2 \times 4 + 4 = 0$ est vrai;
 $C \in \mathcal{P} \iff 2 \times 4 + (-2) - 2 \times 5 + 4 = 0$ est vrai.
 Le plan $\mathcal{P}$ est donc bien le plan (ABC).
2. a. D'après 1., $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (-2) \times 1 + 0 \times (-4) + (-2) \times (-1) = 0$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont donc orthogonaux, les droites (AB) et (AC) perpendiculaires. Conclusion : le triangle ABC est rectangle en A.
- b. Le vecteur $\vec{n}(a; b; c)$ est un vecteur normal au plan d'équation $ax + by + cz = d = 0$. Ici le vecteur $\vec{n}(2; 1; -2)$, vecteur normal au plan $\mathcal{P}$ est donc un vecteur directeur de la droite (Δ). Si $M \in (\Delta)$ alors $\overrightarrow{OM} = \lambda \vec{n}$. Cette égalité vectorielle se traduit par le système :

$$\begin{cases} x = 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -2\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}.$$
- c. Puisque $(KO) \perp \mathcal{P}$, $(KO) = \Delta$. Le point K est commun à (Δ) et à $\mathcal{P}$. En utilisant la question précédente, on a $2x_K + y_K - 2z_K + 4 = 0 \iff 2 \times \lambda + \lambda - 2 \times (-2\lambda) + 4 = 0 \iff 9\lambda + 4 = 0 \iff \lambda = -\frac{4}{9}$.
 Conclusion : les coordonnées de K sont donc $\left(-\frac{8}{9}; -\frac{4}{9}; \frac{8}{9}\right)$.
 Donc $OK^2 = \left(-\frac{8}{9}\right)^2 + \left(-\frac{4}{9}\right)^2 + \left(\frac{8}{9}\right)^2 = \frac{64}{81} + \frac{16}{81} + \frac{64}{81} = \frac{144}{81} = \frac{16}{9}$. Conclusion : $OK = \frac{4}{3}$.
- d. On prend pour base (ABC) et la hauteur est donc [OK]. D'après 1., $AB^2 = 4 + 4 = 8$, donc $AB = 2\sqrt{2}$; $AC^2 = 1 + 16 + 1 = 18$, donc $AC = 3\sqrt{2}$. L'aire du triangle rectangle ABC est : $\frac{AB \times AC}{2} = \frac{2\sqrt{2} \times 3\sqrt{2}}{2} = 6$.
 Donc $V(OABC) = \frac{6 \times OK}{3} = \frac{6 \times \frac{4}{3}}{3} = \frac{8}{3}$.
3. a. Le barycentre G existe car la somme des coefficients $3 + 1 + 1 + 1$ est non nulle. Il est tel que $3\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.
- b. I centre de gravité du triangle ABC est l'isobarycentre du système de points pondérés $\{(A, 1), (B, 1), (C, 1)\}$.
 D'après l'associativité du barycentre, G est le barycentre (plus précisément l'isobarycentre) du système de points pondérés $\{(O, 3), (I, 3)\}$. G est donc le milieu de [OI], donc appartient à la droite (OI).
- c. On sait que $\overrightarrow{OI} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$. Les coordonnées de I sont donc $\left(\frac{8}{3}; \frac{2}{3}; \frac{15}{3}\right)$. Celles de G : $\left(\frac{4}{3}; \frac{1}{3}; \frac{5}{2}\right)$.
 La distance de G au plan $\mathcal{P}$ est donnée par

$$d(G, \mathcal{P}) = \frac{|2x_G + y_G - 2z_G + 4|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}} = \frac{\left|\frac{8}{3} + \frac{1}{3} - 5\right|}{3} = \frac{2}{3}.$$

4. En utilisant la relation de Chasles $\overrightarrow{3MO} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG} + 3\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC} = 6\overrightarrow{MG}$, par définition du barycentre.

On a donc $\|\overrightarrow{3MO} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 5. \iff \|6\overrightarrow{MG}\| = 5 \iff GM = \frac{5}{6}$.

L'ensemble Γ est donc la sphère de centre G et de rayon $\frac{5}{6}$.

D'après la question 3 c, la distance de G au plan $\mathcal{P}$ est égale à $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} < \frac{5}{6}$. Le plan $\mathcal{P}$ et la sphère Γ sont donc sécants : l'intersection est un cercle.

EXERCICE 2

5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. Question de cours : il suffit de montrer que le complexe $\frac{z' - \omega}{z - \omega}$ a pour module 1 et a un argument égal à θ à 2π près.

2. a. D'après le résultat précédent si $M'(z')$ est l'image de $M(z)$ par la rotation

$$R \text{ on a alors : } z' - (2 + 2i) = e^{i\frac{\pi}{3}} [z - (2 + 2i)] \iff$$

$$z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) [z - (2 + 2i)] + 2 + 2i \iff$$

$$z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z - (1 + i\sqrt{3})(1 + i) + 2 + 2i \iff$$

$$z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z + 1 + \sqrt{3} + i(1 - \sqrt{3}) \text{ qui est l'écriture complexe de } R.$$

- b. En appliquant cette relation à l'affixe de I, on obtient :

$$z_A = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{3}) + \frac{i}{2}(3 - \sqrt{3}).$$

- c. On a $IB^2 = |1 + i|^2 = 2$; de même $IO^2 = |1 + i|^2 = 2$.

d'après la définition de la rotation R , le triangle BIA est isocèle d'angle au sommet de mesure $\frac{\pi}{3}$: c'est donc un triangle équilatéral.

Donc $IB = AB = IA = IO = \sqrt{2}$.

En particulier les points les points O, A et B sont équidistants de I. Ils sont sur le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{2}$.

On a $1 + i = \frac{0 + (2 + 2i)}{2}$, c'est-à-dire que I est le milieu du diamètre [OB].

Le triangle OAB est donc inscrit dans le cercle précédent : il est donc rectangle en A.

Par complément à π , on trouve que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$.

- d. On a $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OB}) = \arg(z_1) = \frac{\pi}{4}$.

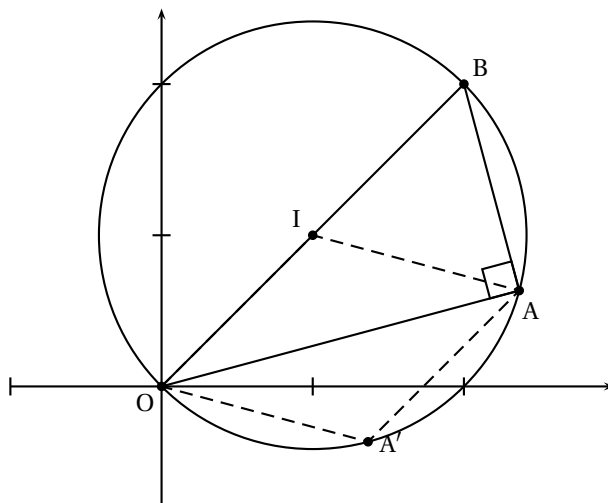
$$\text{En appliquant la relation de Chasles : } (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OA}) = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OB}) - (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}.$$

3. a. $A' = T(A)$. L'affixe du vecteur $\overrightarrow{IO}$ est $-1 - i$. On a donc

$$z_{A'} = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{3}) + i(3 - \sqrt{3}) - 1 - i = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}) + \frac{i}{2}(1 - \sqrt{3}).$$

- b. On a par définition de la translation $\overrightarrow{IO} = \overrightarrow{AA'} \iff$ (OIAA' est un parallélogramme; de plus d'après 2 c $AI = IO$; La quadrilatère OIAA' est un parallélogramme ayant deux côtés consécutifs de même longueur : c'est donc un losange (mais pas un carré car $(\overrightarrow{IO}, \overrightarrow{IA}) = \frac{2\pi}{3}$.)

- c. On sait que $(\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OI}) = \frac{\pi}{3}$ et $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OI}) = \frac{\pi}{6}$; en appliquant la relation de Chasles on obtient $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OA'}) = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OA}) - (\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OA}) = \frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{12}$.



EXERCICE 2

5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. Voir le cours

2. a. Triangle (OAG) : on a $OA = 2$, $OG = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$, $AG = \sqrt{2}$.Triangle OEF : on a $OE = \sqrt{2}$, $OF = \sqrt{5}$, $EF = 1$.On remarque que $\frac{OA}{OE} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{OG}{OF} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}} = \frac{AG}{EF} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$.

Conclusion : Les triangles OAG et OEF sont donc semblables.

b. S'il existe une similitude indirecte S transformant OAG en OEF, son écriture est de la forme : $z' = a\bar{z} + b$, avec $a \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{C}$. On a donc

$$\begin{cases} S(O) = O \\ S(G) = F \\ S(A) = E \end{cases} \iff \begin{cases} 0 &= a \times 0 + b \\ 1+i &= a \times 2 + b \\ 2+i &= a \times (3-i) + b \end{cases} \iff \begin{cases} b &= 0 \\ a &= \frac{1}{2}(1+i) \\ a &= \frac{2+i}{3-i} \end{cases}$$

$$\text{Or } a = \frac{(2+i)(3+i)}{(3-i)(3+i)} = \frac{5+5i}{10} = \frac{1}{2}(1+i).$$

L'écriture complexe de S est donc : $z' = \frac{1}{2}(1+i\bar{z})$.c. L'écriture complexe de h est : $z' = \frac{1}{\sqrt{2}}z$.L'affixe de A' est donc $\frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$. Le milieu I de $[EA']$ a pour affixe

$$\frac{1+\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}i.$$

l'équation de la droite (OI) est donc $y = \frac{1}{(1+\sqrt{2})}x$. Calculons $\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{EA'}$ =

$$\frac{1+\sqrt{2}}{2} \times (\sqrt{2}-1) + \frac{1}{2} \times (-1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0.$$

 E est l'image de A par l'homothétie h suivie de la symétrie σ .De même $G(3+i)$, donc $G' \left(\frac{3}{\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$.Le milieu J de $[FG']$ a pour affixe $\frac{3\sqrt{2}}{4} + 1 + i \left(\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2} \right)$.On a $\left(\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2} \right) (1+\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 + \frac{3\sqrt{2}}{4}$. Donc le point J

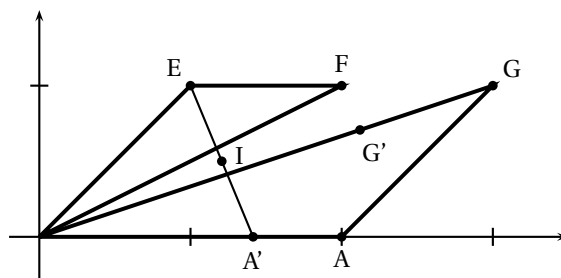
appartient bien à la droite (OI).

$$\text{De même } \overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{FG'} = \left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right) \times \left(\frac{3\sqrt{2}}{2} - 2\right) + \frac{1}{2} \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right) = \frac{3\sqrt{2}}{4} + \frac{3}{2} -$$

$1 - \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{2} = 0$. F est donc l'image de G' par la symétrie σ et F est l'image de G par l'homothétie h suivie de la symétrie σ .

Enfin O est l'image de O par l'homothétie h suivie de la symétrie σ .

Conclusion : d'après la question 1, on a $S = \sigma \circ h$.



EXERCICE 3

5 points

Commun à tous les candidats

1. Le numérateur de f est la composée d'une fonction affine et de la fonction $\ln$. Elle est donc dérivable pour $x > -3$. Le dénominateur est une fonction affine. f est donc dérivable comme quotient de fonctions dérivables, le dénominateur ne s'annulant pas sur $[0; +\infty[$.

On calcule $f'(x) = \frac{1 - \ln(x+3)}{(x+3)^2}$. Comme $(x+3)^2 \geq 9 > 0$, la dérivée est du signe de $1 - \ln(x+3)$.

Or $1 - \ln(x+3) = 0 \iff \ln e = \ln(x+3) \iff e = x+3 \iff x = e-3 < 0$.

On a $x \geq 0 \iff x+3 \geq 3 > e \Rightarrow x+3 > e \iff \ln(x+3) > \ln e \iff \ln(x+3) > 1 \iff 0 > 1 - \ln(x+3)$.

Conclusion : sur $[0; +\infty[$, $f'(x) < 0$ et la fonction est décroissante sur cet intervalle.

On a $f(0) = \frac{\ln 3}{3}$ et en posant $u = x+3$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\ln u}{u} = 0$.

D'où le tableau de variations de f :

x	0	$+\infty$
f'		-
$f(x)$	$\frac{\ln 3}{3}$	0

2. a. Si $n \leq x \leq n+1$ alors par décroissance de la fonction sur f sur $[0; +\infty[$, $f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$.

- b. En intégrant de n à $n+1$ les fonctions précédentes on obtient l'encadrement :

Pour tout entier naturel n ,

$$\int_n^{n+1} f(n+1) dx \leq \int_n^{n+1} f(x) dx \leq \int_n^{n+1} f(n) dx \text{ ou } f(n+1) \leq u_n \leq f(n).$$

- c. En appliquant le théorème des gendarmes, u_n qui est encadré par deux nombres qui ont pour limite 0 a pour limite 0.

3. a. La fonction définie par $x \mapsto u(x) = \ln(x+3)$ est dérivable sur $[0; +\infty[$, ainsi que la fonction définie par $u \mapsto u^2$. Par composition, la fonction F est dérivable sur $[0; +\infty[$.

$$\text{Sur cet intervalle, } F'(x) = 2u \times u' = 2 \times \ln(x+3) \times \frac{1}{x+3} = 2 \frac{\ln(x+3)}{x+3} = 2f(x).$$

- b. D'après la question précédente, pour tout entier naturel n :

$$I_n = \int_0^n f(x) dx = \left[\frac{F(x)}{2} \right]_0^n = \frac{1}{2} [F(x)]_0^n = \frac{1}{2} [F(n) - F(0)] = \\ I_n = \frac{[\ln(n+3)]^2 - [\ln 3]^2}{2}.$$

4. Pour tout entier n , $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx + \dots + \int_{n-1}^n f(x) dx = \int_0^n f(x) dx$ par application de la relation de Chasles. Finalement : $S_n = I_n = \frac{[\ln(n+3)]^2 - [\ln 3]^2}{2}$.

$$\text{Comme } \lim_{n \rightarrow +\infty} (n+3) = +\infty, \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n+3) = +\infty, \lim_{n \rightarrow +\infty} [\ln(n+3)]^2 = +\infty \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty.$$

La suite (S_n) est divergente.

EXERCICE 4

6 points

Commun à tous les candidats

1. La variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0,1$.
 Pour $0 \leq k \leq 50$, $P(X = k) = \binom{50}{k} 0,1^k \times 0,9^{50-k}$.
 – $P(A) = 1 - P(X = 0) = 1 - (0,9)^{50} \approx 0,994\,8 \approx 0,995$ au millième.
 – $P(B) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0,9^{50} + 50 \times 0,1 \times 0,9^{49} + \frac{50 \times 49}{2} \times 0,1^2 \times 0,9^{48} \approx 0,111\,729 \approx 0,112$ au millième.
 – $P(C) = 1 - P(B) \approx 1 - 0,111\,729 \approx 0,888$ au millième.
2. a. La probabilité qu'au moins trois personnes répondent est : $P(X \geq 3) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)] = 1 - \left[\frac{e^{-a} a^0}{0!} + \frac{e^{-a} a^1}{1!} + \frac{e^{-a} a^2}{2!} \right] = 1 - e^{-a} \left[1 + a + \frac{a^2}{2} \right]$.
- b. $f(5) = 1 - e^{-5} \left(1 + 5 + \frac{25}{2} \right) = 1 - e^{-5} \times \frac{37}{2} \approx 0,875\,3 \approx 0,875$ au millième.
 $a = 5$ correspond à $n = 50$: on est donc dans la situation de la question 1 où on avait une probabilité de 0,888 ; on a donc un résultat voisin.
3. a. La fonction est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$. On a $f'(x) = e^{-x} \left(1 + x + \frac{x^2}{2} - 1 - x \right) = \frac{e^{-x} x^2}{2}$. Comme $x^2 \geq 0$, $e^{-x} > 0$, $f'(x) \geq 0$. La fonction f est croissante sur $\mathbb{R}^*$.
 $f(0) = 0$. Comme $f(x) = 1 - \frac{1}{e^x} - \frac{x}{e^x} - \frac{x^2}{e^x}$ la limite de chacun des trois derniers termes est nulle en $+\infty$, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$. D'où le tableau :

x	0	$+\infty$
f'		–
$f(x)$	0	1

- b.** Sur $\mathbb{R}^*$, f est continue et strictement croissante de 0 à 1. Or $0 < 0,95 < 1$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel α tel que $f(\alpha) = 0,95$.
La calculatrice indique : $f(6,29) \approx 0,94979$ et $f(6,3) \approx 0,95815$.
On a donc $6,29 < \alpha < 6,3$.
- c.** La probabilité qu'au moins trois personnes répondent parmi n personnes interrogées est $f(x) = 1 - e^{-x} \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)$ et $x = \frac{n}{10}$. Pour que $f(x) \geq 0,95$ ou d'après la question précédente $f(x) \geq f(\alpha)$ il faut que $x \geq \alpha$, d'après la croissance de la fonction f vue au 3 a. C'est-à-dire que $\frac{n}{10} \geq 6,3 \iff n \geq 63$.
Il faut donc interroger au minimum 63 personnes.