Exercice 1 (4 points)

- Partie A -

D'après le résultat (2), on a pour tout entier naturel n :

$$u_0 \leqslant u_1 \leqslant \dots \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n \leqslant \dots \leqslant v_1 \leqslant v_0$$

En conséquence et d'après le résultat (3) :

- La suite (u_n) est croissante et majorée par v_0 donc converge vers un certain réel ℓ.
- La suite (v_n) est décroissante et minorée par u_0 donc converge vers un certain réel ℓ'.

Pour tout entier naturel n, on a : $u_n = (u_n - v_n) + v_n$

D'après le résultat (1), $u_n - v_n$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini ; un passage à la limite dans l'égalité ci-dessus donne alors : $\ell = \ell'$

On a démontré que deux suites adjacentes sont convergentes et ont même limite.

- Partie B -

1. **FAUX**

   Pour construire un contre-exemple, il suffit de choisir une suite (u_n) qui converge vers 0.

   Considérons, pour tout entier naturel n : $u_n = \dfrac{1}{n+1}$

   Ainsi, on a : $v_n = -2(n+1)$

   La suite (v_n) diverge alors vers $-\infty$.

2. **VRAI**

   Si la suite (u_n) est minorée par 2, alors pour tout entier naturel n, on a :

   $$2 \leqslant u_n$$

   Par décroissance de la fonction inverse sur $[2, +\infty[$, il vient :

   $$\frac{1}{2} \geqslant \frac{1}{u_n}$$

   En mutlipliant par – 2 : $-1 \leqslant v_n$

   La suite (v_n) est donc minorée par -1.

3. **FAUX**

   Le contre-exemple choisi à la question 1 convient :

   $$u_n = \frac{1}{n+1}$$

   Cette suite est bien décroissante puisque pour tout entier naturel n :

   $$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{-1}{(n+1)(n+2)}$$

   $$u_{n+1} - u_n < 0$$

   La suite (u_n) est bien décroissante.

   Quant à la suite (v_n) définie par : $v_n = -2(n+1)$

On a pour tout entier naturel n :

$$v_{n+1} - v_n = -2(n+2) + 2(n+1) = -2$$

$$v_{n+1} - v_n \leqslant 0$$

La suite (v_n) est décroissante.

Et comme elle n'est pas constante, on ne peut pas donc pas dire qu'elle soit croissante.

4. **FAUX**

   Pour construire un contre-exemple, il suffit de choisir une suite (u_n) qui diverge sans tendre vers l'infini.

   Par exemple : $u_n = -2 \times (-1)^n$

   La suite (u_n) est bien divergente (voir la preuve ci-dessous)

   Alors : $v_n = (-1)^n$

   La suite (v_n) est donc divergente.

   Preuve de la divergence de la suite de terme général $(-1)^n$:

   Supposons, au contraire, que la suite de terme général $(-1)^n$ converge vers un certain réel ℓ.

   Soit $I = \left]\ell - \frac{1}{2}\,;\,\ell + \frac{1}{2}\right[$. I est un intervalle ouvert centré en ℓ.

   D'après notre hypothèse, il existe un rang N à partir duquel, on aura :

   $$(-1)^n \in I$$

   Autrement dit : $-\frac{1}{2} < (-1)^n - \ell < \frac{1}{2}$

   Or, pour n pair, cela donne : $\ell \in \left]\frac{1}{2}\,;\,\frac{3}{2}\right[$

   Et pour n impair : $\ell \in \left]-\frac{3}{2}\,;\,-\frac{1}{2}\right[$

   D'où une contradiction. Donc la suite considérée diverge.

Exercice 2 (5 points)

1. Le cercle $\mathscr{C}$ a pour centre le point S d'affixe $s = \frac{1}{2}$ et pour rayon $R = \frac{1}{2}$.

   Comme le point M est sur le cercle, la distance SM est égale au rayon :

   $$SM = R$$

   $$\left|m - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$$

2. Comme $MKLO$ est un carré de sens direct, le point L est l'image du point M par un quart de tour direct de centre O donc : $l = \mathbf{i}m$

   De même, comme $MAPN$ est un carré de sens direct, le point P est l'image du point M par un quart de tour indirect de centre A : $p - a = -\mathbf{i}(m - a)$

   Et comme $a = 1$: $p = -\mathbf{i}m + 1 + \mathbf{i}$

   On démontre de la même façon que : $n = (1 - \mathbf{i})m + \mathbf{i}$

   $$k = (1 + \mathbf{i})m$$

3. a. L'affixe ω du point Ω, milieu du segment $[PL]$ est donnée par :

$$\omega = \frac{p+l}{2} = \frac{-\mathbf{i}m+1+\mathbf{i}+\mathbf{i}m}{2} = \frac{1+\mathbf{i}}{2}$$

Le point Ω est donc indépendant de M (puisque son affixe ne dépend pas de m).

b. On a :
$$S\Omega = |\omega - s| = \left|\frac{\mathbf{i}}{2}\right| = \frac{1}{2} = R$$

Donc le point Ω est un point du cercle $\mathscr{C}$. Son affixe est $\omega = \dfrac{1+\mathbf{i}}{2}$.

Plus précisément, Ω est le point d'intersection du cercle $\mathscr{C}$ et de la médiatrice de $[OA]$ qui a une partie imaginaire positive.

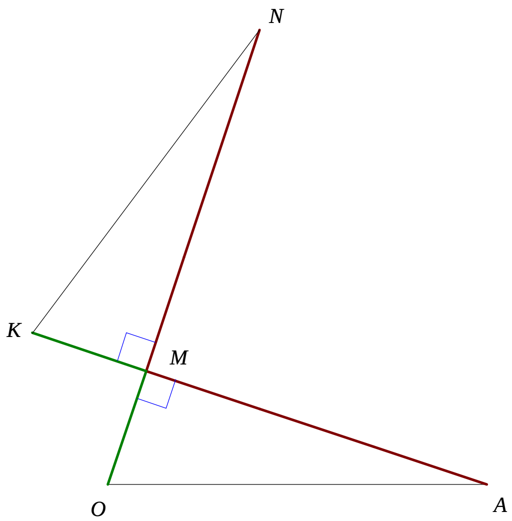
4. a. La distance KN est donnée par :

$$KN = |n-k| = |(1-\mathbf{i})m + \mathbf{i} - (1+\mathbf{i})m| = |(1-2m)\mathbf{i}| = |1-2m| = 2\left|\frac{1}{2}-m\right|^{1} = 2\times\frac{1}{2} = 1$$

La distance KN est constante égale au diamètre du cercle $\mathscr{C}$.

On peut faire une autre démonstration géométrique très simple.

Comme :
$$\begin{cases} MN = MA \\ MK = MO \\ (\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MK}) = (\overrightarrow{MO},\overrightarrow{MA}) \end{cases}$$



Les triangles MNK et MAO sont donc isométriques. En conséquence :

$$KN = OA = 1$$

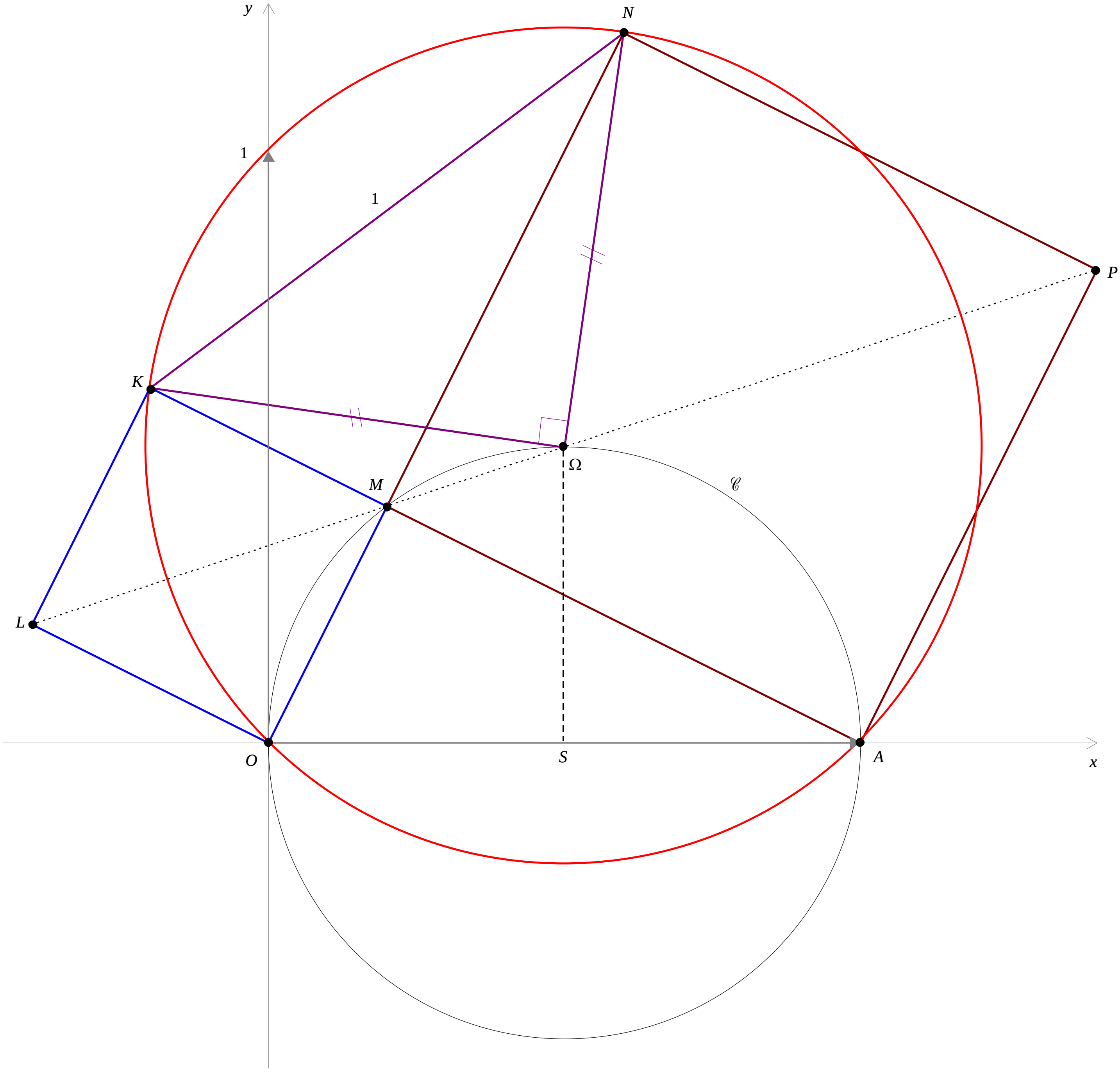
b. Montrons que le triangle ΩNK est rectangle isocèle en Ω. Pour cela, on prouve que le point K est l'image du point N par le quart de tour direct de centre Ω.

$$\mathbf{i}(n-\omega) = \mathbf{i}\left((1-\mathbf{i})m + \mathbf{i} - \frac{1+\mathbf{i}}{2}\right) = (\mathbf{i}+1)m - 1 - \frac{\mathbf{i}-1}{2} = (\mathbf{i}+1)m - \frac{1+\mathbf{i}}{2} = k - \omega$$

Ce qui prouve que le triangle ΩNK est rectangle isocèle en Ω.

5. Le sommet principal Ω et la longueur de l'hypoténuse KN du triangle rectangle isocèle ΩNK sont invariants. Donc les longueurs ΩK et ΩN le sont également (en effet, dans un tel triangle, le rapport entre la longueur de l'hypoténuse et celle d'un côté de l'angle droit est constant égal à $\sqrt{2}$). En conséquence :

$$N \text{ appartient au cercle de centre } \Omega \text{ et de rayon } \Omega N = \frac{KN}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



Voir les figures dynamiques en cliquant sur ce lien : http://e-bac.sesamath.net/bacS/bacS2005/fig1_normal.htm

Exercice 2 *Spécialité* (5 points)

- Partie A -

1. a. L'angle de la similitude f est donné par :

$$\left(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MR}\right) = -\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$$

Son rapport est donné par : $\dfrac{MR}{MN} = \dfrac{MR}{\sqrt{2}MR} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

b. L'écriture complexe de la similitude f est :

$$z' - m = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathbf{e}^{-\frac{\mathbf{i}\pi}{4}}(z - m)$$

Or : $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\,\mathbf{e}^{-\frac{\mathbf{i}\pi}{4}} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\mathbf{i}$

D'où : $r - m = \dfrac{1-\mathbf{i}}{2}(n - m)$

Donc : $r = \dfrac{1+\mathbf{i}}{2}m + \dfrac{1-\mathbf{i}}{2}n$

2. Il suffit de calculer :

$$r + s + t + u = \frac{1+\mathbf{i}}{2}(m + n + p + q) + \frac{1-\mathbf{i}}{2}(n + p + q + m) = m + n + p + q$$

Ce qui prouve que les quadruplets (M, N, P, Q) et (R, S, T, U) ont le même isobarycentre.

3. a. On a, d'une part :

$$\mathbf{i}(t - r) = \mathbf{i}\left(\frac{1+\mathbf{i}}{2}(p-m) + \frac{1-\mathbf{i}}{2}(q-n)\right) = \left(\frac{\mathbf{i}-1}{2}(p-m) + \frac{\mathbf{i}+1}{2}(q-n)\right)$$

Et d'autre part : $u - s = \left(\dfrac{1+\mathbf{i}}{2}(q-n) + \dfrac{1-\mathbf{i}}{2}(m-p)\right)$

D'où : $u - s = \mathbf{i}(t - r)$

b. On a donc : $\dfrac{u-s}{t-r} = \mathbf{i}$

En passant aux modules, il vient : $SU = RT$

Les segments $[RT]$ et $[SU]$ ont donc même longueur.

En passant aux arguments, il vient :

$$\left(\overrightarrow{RT}, \overrightarrow{SU}\right) = \arg(\mathbf{i}) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$$

Les droites (RT) et (SU) sont perpendiculaires.

(Il s'agit de la configuration de Van Aubel)

- Partie B -

1. On sait qu'il existe une unique similitude directe g transformant R en S et T en U (puisque $R \neq T$ et $S \neq U$). Comme $RT = SU$, le rapport de cette similitude directe est donc égal à 1. Ainsi, g est une translation ou une rotation. Ce ne peut être une translation car (RT) et (SU) ne sont pas parallèles donc g est une rotation et elle est unique (et son angle est $\dfrac{\pi}{2}$).

2. Comme une rotation est une isométrie, on a : $\Omega R = \Omega S$

   Donc Ω est sur la médiatrice du segment $[RS]$.

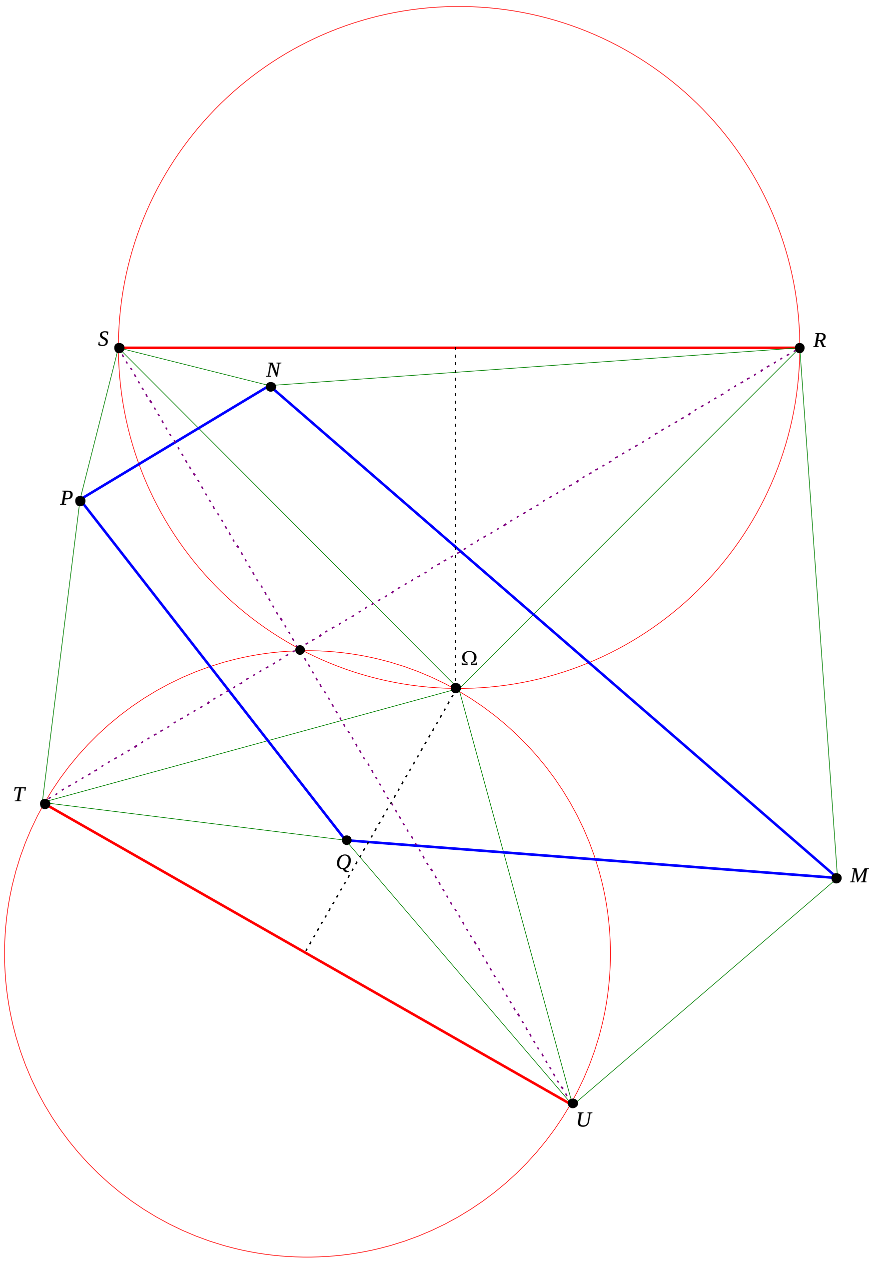
   De même : $\Omega T = \Omega U$

   Donc Ω est sur la médiatrice du segment $[TU]$.

   Distinguons deux cas :

   Cas général.

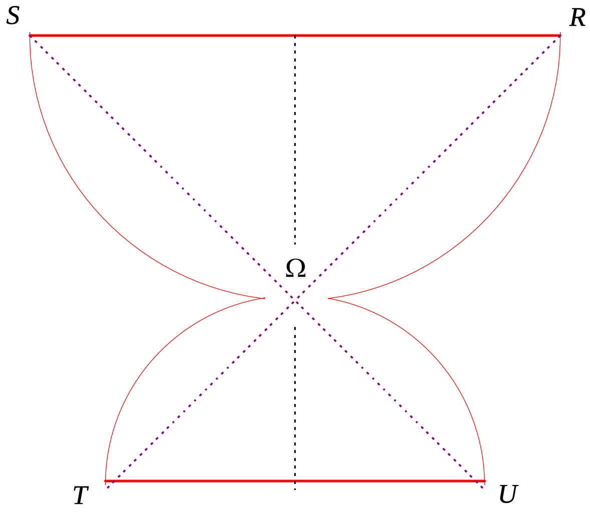
   Les deux médiatrices ci-dessus sont sécantes, et alors Ω est à l'intersection des ces deux médiatrices ce qui permet de le construire facilement.



Voir les figures dynamiques en cliquant sur ce lien : http://e-bac.sesamath.net/bacS/bacS2005/fig1.htm

Cas particulier.

Les médiatrices de [RS] et [TU] sont confondues (ce qui peut se produire), alors $RSTU$ est un trapèze dont les diagonales sont de même longueur (puisque $SU = RT$), c'est donc un trapèze isocèle (éventuellement rectangle) :



Dans ce cas, on construit le point Ω à l'intersection des deux diagonales [RT] et [SU] du trapèze. En effet, comme les diagonales sont perpendiculaires, on a bien :

$$\left(\overrightarrow{\Omega R}, \overrightarrow{\Omega S}\right) = \left(\overrightarrow{\Omega T}, \overrightarrow{\Omega U}\right) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$$

Et comme la figure a un axe de symétrie, l'intersection Ω des deux diagonales [RT] et [SU] est situé sur la médiatrice commune des segments [RS] et [TU] donc :

$$\Omega R = \Omega S \text{ et } \Omega U = \Omega T$$

La rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$ transforme bien R en S et T en U et par unicité de g, Ω est bien son centre.

Autre méthode (permettant d'éviter la distinction entre les deux cas précédents).

Montrons que Ω est le milieu de [MP].

On sait que : $S = g(R)$

Donc : $s - \omega = \mathbf{i}(r - \omega)$

D'après les résultats de la partie A :

$$\frac{1+\mathbf{i}}{2}n + \frac{1-\mathbf{i}}{2}p - \omega = \mathbf{i}\frac{1+\mathbf{i}}{2}m + \mathbf{i}\frac{1-\mathbf{i}}{2}n - \mathbf{i}\omega$$

$$\frac{1-\mathbf{i}}{2}(m+p) = \omega(1-\mathbf{i})$$

$$\omega = \frac{m+p}{2}$$

Donc Ω est le milieu de [MP].

Exercice 3 (5 points)

1. a. Pour $k \in [\![0\,;3]\!]$, la probabilité d'obtenir k billes rouges est donnée par

$$P(X=k) = \frac{\binom{10}{k}\binom{3}{3-k}}{\binom{13}{3}}$$

Il s'agit de la loi "hypergéométrique".

où : $\binom{10}{k}\binom{3}{3-k}$ est le nombre de cas favorables

(nombre façons de choisir k billes rouges parmi 10 et donc $3-k$ vertes parmi 3)

et : $\binom{13}{3}$ est le nombre de cas possibles

On obtient à 10^{-3} près à l'aide de la calculatrice :

$$p(X=0) = \frac{1}{286} \simeq 0{,}003 \text{ à } 10^{-3} \text{ près par défaut}$$

$$p(X=1) = \frac{15}{143} \simeq 0{,}104 \text{ à } 10^{-3} \text{ près par défaut}$$

$$p(X=2) = \frac{135}{286} \simeq 0{,}472 \text{ à } 10^{-3} \text{ près par défaut}$$

$$p(X=3) = \frac{60}{143} \simeq 0{,}419 \text{ à } 10^{-3} \text{ près par défaut}$$

Récapitulons :

Nombre de billes rouges	0	1	2	3	Total
Probabilité	$P(X=0) \simeq 0{,}003$	$P(X=1) \simeq 0{,}105$	$P(X=2) \simeq 0{,}472$	$P(X=3) \simeq 0{,}420$	1

(Note : on a jugé préférable, dans ce tableau, de pas arrondir par défaut pour obtenir un total égal à 1)

b. L'espérance mathématique $\mathbb{E}(X)$ de la variable aléatoire X est donnée par :

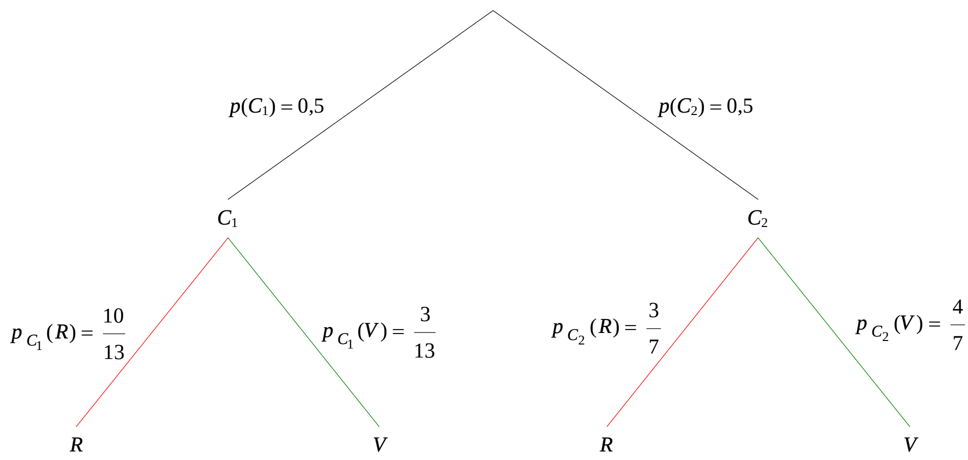
$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{3} kP(x=k) \simeq 2{,}307 \text{ à } 10^{-3} \text{ près par défaut}$$

(La valeur exacte de l'espérance de la loi hypergéométrique est $np = 3 \times \frac{10}{13}$

où n est le nombre de billes tirées et p la proportion de billes rouges)

En moyenne, à ce jeu, l'enfant obtient environ 2,3 billes rouges.

2. a. Arbre de la situation :



b. D'après la formule des probabilités totales appliquée à la partition $C_1 \cup C_2$, on a :

$p(R) = p(R \cap C_1) + p(R \cap C_2) = \frac{10}{13} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{7} \times \frac{1}{2} = \frac{109}{182} \simeq 0{,}599$ à 10^{-3} près (0,598 par défaut)

On environ 60% de chance d'obtenir une bille rouge.

c. Il s'agit de calculer la probabilité conditionnelle suivante :

$$p_R(C_1) = \frac{p(R \cap C_1)}{p(R)} = \frac{\frac{10}{26}}{\frac{109}{182}} \simeq 0{,}642 \text{ à } 10^{-3} \text{ près par défaut}$$

3. a. La probabilité de n'obtenir aucune bille rouge lorsqu'on répète n fois de manière indépendante le jeu est :

$$(1 - p(R))^n$$

Par passage à l'événement contraire, on a donc :

$$p_n = 1 - (1 - p(R))^n$$

$$p_n = 1 - \left(\frac{73}{182}\right)^n$$

b. On résout l'inéquation $\quad p_n \geqslant 0{,}99$

$$1 - \left(\frac{73}{182}\right)^n \geqslant 0{,}99$$

$$0{,}01 \geqslant \left(\frac{73}{182}\right)^n$$

Par croissance de la fonction logarithme népérien sur $\mathbb{R}_+^*$ et tenant compte de la relation $\ln(A^n) = n\ln(A)$

:

$$\ln(0{,}01) \geqslant n\ln\left(\frac{73}{182}\right)$$

Et comme $\ln\left(\frac{73}{182}\right)$ est négatif (puisque $\frac{73}{182} \in]0 ; 1[$) :

$$n \geqslant \frac{\ln(0{,}01)}{\ln\left(\frac{73}{182}\right)}$$

La calculatrice donne : $\quad \frac{\ln(0{,}01)}{\ln\left(\frac{73}{182}\right)} \simeq 5{,}04$ à 10^{-2} près

Et comme n est un entier : $\quad \boldsymbol{n \geqslant 6}$

La plus petite valeur de n pour laquelle p_n est supérieur à 0,99 et $n = 6$.

Exercice 4 (6 points)

- Partie A -

1. a. En multipliant numérateur et dénominateur par $\mathbf{e}^{-\frac{x}{4}}$, nous obtenons pour tout réel x :

$$f(x)=\frac{3\mathbf{e}^{\frac{x}{4}}}{2+\mathbf{e}^{\frac{x}{4}}}=\frac{3}{2\mathbf{e}^{-\frac{x}{4}}+1}$$

b. **Limite en $+\infty$.**

On a : $$\lim_{x\to+\infty}\mathbf{e}^{-\frac{x}{4}}=0$$

Donc : $$\lim_{x\to+\infty}1+2\mathbf{e}^{-\frac{x}{4}}=1$$

D'où, par inverse : $$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+2\mathbf{e}^{-\frac{x}{4}}}=1$$

On en déduit : $$\lim_{x\to+\infty}f(x)=3$$

Limite en $-\infty$.

On a : $$\lim_{x\to-\infty}\mathbf{e}^{-\frac{x}{4}}=+\infty$$

Donc : $$\lim_{x\to-\infty}1+2\mathbf{e}^{-\frac{x}{4}}=+\infty$$

D'où, par inverse : $$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{1+2\mathbf{e}^{-\frac{x}{4}}}=0$$

On en déduit : $$\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$$

c. Soient u et v deux réels tels que : $$u\leqslant v$$

En multipliant par $-\frac{1}{4}$: $$-\frac{1}{4}u\geqslant-\frac{1}{4}v$$

Par croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$:

$$\mathbf{e}^{-\frac{u}{4}}\geqslant\mathbf{e}^{-\frac{v}{4}}$$

Par croissance de la fonction affine $t\mapsto 1+2t$ sur $\mathbb{R}$:

$$1+2\mathbf{e}^{-\frac{u}{4}}\geqslant 1+2\mathbf{e}^{-\frac{v}{4}}\ (>0)$$

Par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$\frac{1}{1+2\mathbf{e}^{-\frac{u}{4}}}\leqslant\frac{1}{1+2\mathbf{e}^{-\frac{v}{4}}}$$

Et en multipliant par 3 : $$f(u)\leqslant f(v)$$

Donc la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$.

Remarque : on pouvait aussi étudier le signe de la dérivée de f.

- Partie B -

1. a. Les solutions g de l'équation différentielle (E_1) sont de la forme :

$$g(t) = C\,\mathbf{e}^{\frac{t}{4}} \quad \text{où } C \text{ est une constante réelle}$$

b. La condition $g(0) = 1$ donne : $\quad C = 1$

D'où, pour tout réel t de $[0, +\infty[$: $\quad g(t) = \mathbf{e}^{\frac{t}{4}}$

c. On résout l'inéquation : $\quad g(t) \geqslant 3$

$$\mathbf{e}^{\frac{t}{4}} \geqslant 3$$

Par croissance du logarithme népérien sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$\frac{t}{4} \geqslant \ln(3)$$

$$t \geqslant 4\ln(3)$$

Comme $4\ln(3) \simeq 4{,}4$ on peut affirmer qu'après 5 années, la population dépassera les 300 rongeurs.

2. a. On a :

$$u \text{ solution de } (E_2) \iff u' = \frac{1}{4}u - \frac{1}{12}u^2 \text{ et } u(0) = 1 \overset{u>0}{\iff} \frac{u'}{u^2} = \frac{1}{4}\frac{1}{u} - \frac{1}{12} \text{ et } u(0) = 1$$

Or, $h' = -\dfrac{u'}{u^2}$ et $h(0) = \dfrac{1}{u(0)} = 1$ d'où :

$$u \text{ solution de } (E_2) \iff -h' = \frac{1}{4}h - \frac{1}{12} \text{ et } h(0) = 1 \iff h \text{ solution de } (E_3)$$

b. L'équation différentielle $y' = -\dfrac{1}{4}y + \dfrac{1}{12}$ est de la forme $y' = ay + b$ avec $a = -\dfrac{1}{4}$ et $b = \dfrac{1}{12}$.

Ses solutions sont de la forme :

$$h(t) = C\mathbf{e}^{at} - \frac{b}{a} \quad \text{où } C \text{ est une constante réelle}$$

$$h(t) = C\,\mathbf{e}^{-\frac{t}{4}} + \frac{1}{3}$$

La condition $h(0) = 1$ donne : $\quad C + \dfrac{1}{3} = 1$

$$C = \frac{2}{3}$$

D'où : $\quad h(t) = \dfrac{2}{3}\,\mathbf{e}^{-\frac{t}{4}} + \dfrac{1}{3}$

Et comme $u = \dfrac{1}{h}$: $\quad u(t) = \dfrac{3}{1+2\mathbf{e}^{-\frac{t}{4}}} = f(t)$

D'après la partie A, la limite de u en l'infini est égale à 3, donc, avec ce modèle, la population de rongeurs tend vers 300.

Note : un corrigé animé est disponible à l'adresse http://sesabac.net/