# Baccalauréat S Antilles-Guyane septembre 2005

**EXERCICE 1** **5 points**

La suite $(u_n)$ est définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + n - 1$.

1. **a.** Démontrer que pour tout $n \geqslant 3,\ u_n \geqslant 0$.

   **b.** En déduire que pour tout $n \geqslant 4,\ u_n \geqslant n - 2$.

   **c.** En déduire la limite de la suite $(u_n)$.

2. On définit ia suite $(v_n)$ par $v_n = 4u_n - 8n + 24$.

   **a.** Démontrer que $(v_n)$ est une suite géométrique décroissante dont on donnera la raison et le premier terme.

   **b.** Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 7\left(\dfrac{1}{2}\right)^n + 2n - 6$.

   **c.** Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = x_n + y_n$ où $(x_n)$ est une suite géométrique et $(y_n)$ une suite arithmétique dont on précisera pour chacune le premier terme et la raison.

   **d.** En déduire l'expression de $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ en fonction de $n$.

**EXERCICE 2** **4 points**

Soit $f$ la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{2\ln x}{x^2 + x}.$$

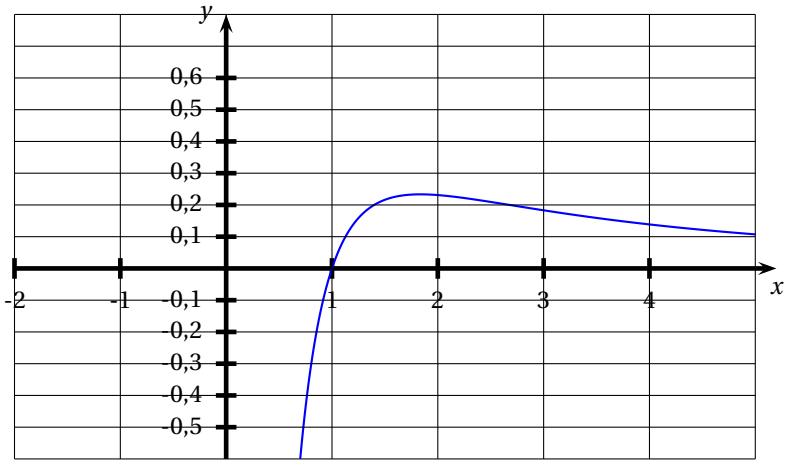
1. Montrer que pour tout $x > 1$, $\dfrac{\ln x}{x^2} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{\ln x}{x}$.

2. **a.** Calculer $\mathrm{I} = \displaystyle\int_2^4 \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$ et $\mathrm{J} = \displaystyle\int_2^4 \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x$ (on pourra utiliser une intégration par parties pour cette dernière).

   **b.** En déduire un encadrement de $\mathrm{K} = \displaystyle\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x$.

3. La figure ci-dessous représente la courbe représentative de $f$ (unités graphiques : en abscisse 1 cm pour 1 unité, en ordonnées 4 cm pour 1 unité). On considère l'ensemble des points $M(x\ ;\ y)$ tels que :

$$\left\{\begin{array}{lllll} 2 & \leqslant & x & \leqslant & 4 \\ 0 & \leqslant & y & \leqslant & f(x) \end{array}\right. \quad \text{et on note } \mathscr{A} \text{ son aire.}$$



À l'aide de l'encadrement trouvé au 2 b, donner un encadrement de $\mathscr{A}$ en cm$^2$.

**EXERCICE 3** **4 points**

Soit $\mathscr{P}$ le plan complexe rapporté au repère $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ (unité graphique : 4 cm). Soit A le point d'affixe 1. On note $f$ l'application de $\mathscr{P}$ privé de A dans $\mathscr{P}$ qui, à tout point $M$ d'affixe $z$, associe le point $M'$ d'affixe $z'$ telle que

$$z' = \frac{1}{z-1}.$$

1. **a.** Soit B le point d'affixe $b = 4 + \text{i}\sqrt{3}$. Déterminer la forme algébrique et la forme exponentielle de l'affixe $b'$ de B$'$.

   **b.** Déterminer les affixes des points ayant pour image par $f$ leur symétrique par rapport à O.

2. **a.** Exprimer $\left|z'\right|$ et $\arg\left(z'\right)$ en fonction de $|z-1|$ et $\arg(z-1)$.

   **b.** Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre A et de rayon $r$. On suppose que $M$ est un point de $\mathscr{C}$. Déterminer $\left|z'\right|$.
   En déduire que $M'$ appartient à un cercle $\mathscr{C}'$ dont on précisera le centre et le rayon.

   **c.** Placer un point $M$ quelconque sur le cercle de centre A et de rayon $\dfrac{1}{2}$ et construire son image $M'$. (On laissera les traits de construction,)

**EXERCICE 4** **4 points**

On modélise le temps d'attente entre deux clients à un guichet comme une variable aléatoire $X$ suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda$. La probabilité pour un client d'attendre moins de $t$ min est définie par :

$$p(X \leqslant t) = \int_0^t \lambda \text{e}^{-\lambda x}\,\text{d}x.$$

Le temps moyen d'attente est donné par :

$$\lim_{t \to +\infty} \int_0^t \lambda x \text{e}^{-\lambda x}\,\text{d}x.$$

1. **a.** À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\displaystyle\int_0^t \lambda x \text{e}^{-\lambda x}\,\text{d}x$ en fonction de $t$.

   **b.** En déduire que le temps moyen est $\dfrac{1}{\lambda}$.

2. Le temps moyen d'attente étant de 5 min, quelle est la probabilité d'attendre plus de 10 min ? plus de 5 min ?

3. Quelle est la probabilité d'attendre encore au moins 5 min, sachant qu'on a déjà attendu 10 min ? Comment expliquez-vous ce résultat ?

**EXERCICE 5** **4 points**

*Pour cet exercice, vous recopierez pour chaque question, votre réponse.*
*Chaque réponse juste rapporte* 1 *point. Une absence de réponse n'est pas sanctionnée.*
*Il sera retiré* 0,5 *point par réponse fausse.*
*La note finale de l'exercice ne pourra pas être inférieure à zéro.*

Soit $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ un repère orthonormal.

**1.** La droite passant par A(1 ; 2 ; −4) et B(−3 ; 4 ; 1) et la droite représentée par
$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & -11-4t \\ y & = & 8+2t \\ z & = & 11+5t \end{array}\right.$ $t \in \mathbb{R}$ sont :

☐ sécantes ☐ strictement parallèles ☐ confondues ☐ non coplanaires

**2.** Soient le plan $\mathscr{P}$ d'équation $2x+3y-z+4=0$ et la droite $\mathscr{D}$ représentée par
$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & t \\ y & = & t \\ z & = & 8+t \end{array}\right.$ $t \in \mathbb{R}$

☐ $\mathscr{P}$ et $\mathscr{D}$ sont sécants. ☐ $\mathscr{P}$ et $\mathscr{D}$ sont strictement parallèles.

☐ $\mathscr{D}$ est incluse dans $\mathscr{P}$. ☐ Aucune de ces possibilités n'est vraie.

**3.** La distance du point A(1 ; 2 ; −4) au plan d'équation $2x+3y-z+4=0$ est :

☐ $\dfrac{8\sqrt{14}}{7}$ ☐ 16 ☐ $8\sqrt{14}$ ☐ $\dfrac{8}{7}$

**4.** Soient le point B(−3 ; 4 ; 1) et la sphère $\mathscr{S}$ d'équation $x^2+y^2+z^2=16$ ;

☐ B est à l'intérieur de $\mathscr{S}$ ☐ B est à l'extérieur de $\mathscr{S}$

☐ B est sur $\mathscr{S}$ ☐ On ne sait pas.