Exercice B2

Partie I g est la fonction numérique g définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $g(x) = x^2 - 2\ln x$

1°) g est dérivable sur $]0\,;+\infty[$, et on a $g'(x) = 2x - 2 \times \frac{1}{x} = 2\left(x - \frac{1}{x}\right) = \frac{2(x^2-1)}{x} = \frac{2(x-1)(x+1)}{x}$

Comme $x \in \,]0\,;+\infty[$, on a $x > 0$ et $x + 1 > 0$, donc $g'(x)$ est du signe de $(x - 1)$.
On en déduit que $g'(x) < 0$ pour $x \in \,]0\,;1[$ et $g'(x) > 0$ pour $x \in \,]1\,;+\infty[$

Donc : $\boxed{g \text{ est décroissante sur }]0\,;1[\text{ et croissante sur }]1\,;+\infty[}$.

2°) On a $g(1) = 1^2 - 2\ln 1 = 1$. D'après le sens de variation de g on a alors $g(x) \geqslant 1$ pour tout $x > 0$.
Donc : $\boxed{g(x) > 0 \text{ pour tout } x \in \,]0\,;+\infty[}$.

Partie II f est la fonction numérique définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1+\ln x}{x}$

$(\mathscr{C})$ est la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 2cm).

1°) On peut écrire $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1+\ln x}{x} = \frac{x}{2} + \frac{1}{x} \times (1 + \ln x)$

On sait que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln x = -\infty$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} 1 + \ln x = -\infty$

d'autre part $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} \times (1 + \ln x) = -\infty$

De plus $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{x}{2} = 0$ et par conséquent $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{x}{2} + \frac{1}{x} \times (1 + \ln x) = -\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = -\infty}$.

On peut en déduire que : $\boxed{\text{la courbe } (\mathscr{C}) \text{ a pour asymptote verticale la droite d'équation } x = 0 \text{ (Axe O}y)}$

2°) a) On peut écrire $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}$

On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{2} = +\infty$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{2} + \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x} = +\infty$ c'est-à-dire $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$.

b) On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - \frac{x}{2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x} = 0$

Donc : $\boxed{\text{la droite } (\Delta) \text{ d'équation } y = \frac{x}{2} \text{ est asymptote à la courbe } (\mathscr{C})}$.

c) On a $f(x) - \frac{x}{2} = \frac{1+\ln x}{x}$.

Donc : $f(x) = \frac{x}{2} \Leftrightarrow 1 + \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1}$

Donc : $\boxed{(\Delta) \text{ coupe } (\mathscr{C}) \text{ au point A d'ascisse } e^{-1} \text{ et d'ordonnée } \frac{e^{-1}}{2}}$

$x \in \,]0\,;+\infty[$, donc $f(x) - \frac{x}{2}$ est du signe de $1 + \ln x$. La fonction $\ln$ étant strictement croissante,

on a alors : $1 + \ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x > -1 \Leftrightarrow x > e^{-1}$
et $1 + \ln x < 0 \Leftrightarrow \ln x < -1 \Leftrightarrow x < e^{-1}$

On en déduit que $f(x) > \frac{x}{2}$ pour $x > e^{-1}$ et $f(x) < \frac{x}{2}$ pour $x < e^{-1}$

$\boxed{\text{Sur }]0\,;e^{-1}[\;\; (\mathscr{C}) \text{ est au-dessous de } (\Delta) \;\; \text{et sur }]e^{-1}\,;+\infty[\;\; (\mathscr{C}) \text{ est au-dessus de } (\Delta)}$.

3°) Pour tout $x \in]0\,;+\infty[$ on a $f(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{1+\ell n\, x}{x}$

f est donc la somme et le quotient de fonctions dérivables sur $]0\,;+\infty[$, donc f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$

et on a : $f'(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\frac{1}{x} \times x - (1+\ell n\, x) \times 1}{x^2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1 - 1 - \ell n\, x}{x^2} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\ell n\, x}{x^2} = \dfrac{x^2 - 2\ell n\, x}{2x^2}$

Donc $f'(x) = \dfrac{g(x)}{2x^2}$. D'après la partie I, on sait que $g(x) > 0$ pour tout $x \in]0\,;+\infty[$,

donc $f'(x) > 0$ pour tout $x \in]0\,;+\infty[$.
On en déduit que f est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.
On peut donner le tableau de variation de f :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
f	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

4°) La tangente (T) à la courbe ($\mathscr{C}$) au point d'abscisse b a pour coefficient directeur $f'(b)$.
Cette tangente est parallèle à (Δ) si et seulement si elle a le même coefficient directeur que (Δ).

$f'(b) = \dfrac{1}{2} \iff \dfrac{b^2 - 2\ell n\, b}{2b^2} = \dfrac{1}{2} \iff b^2 - 2\ell n\, b = b^2 \iff \ell n\, b = 0 \iff b = 1$

$\boxed{\text{Il existe donc un point B et un seul où la tangente (T) à la courbe } (\mathscr{C}) \text{ est parallèle à } (\Delta)}$.

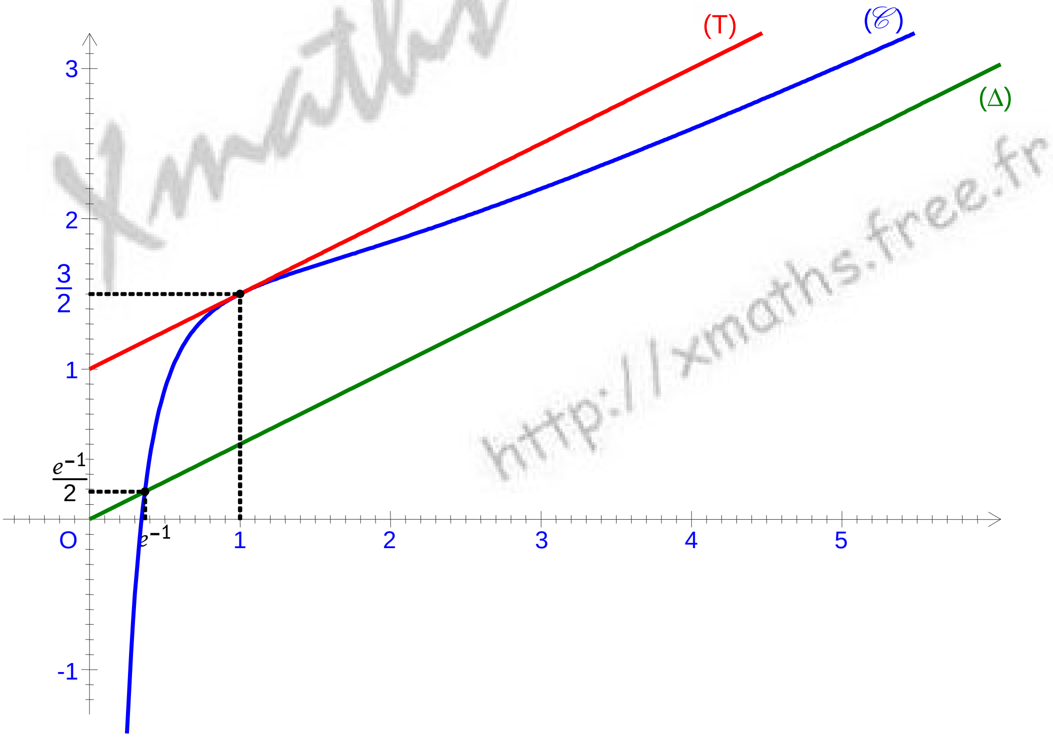
$\boxed{\text{B a pour abscisse 1 et pour ordonnée } f(1) = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}}$.

5°) f est une fonction continue et strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.
Donc pour tout réel k dans l'intervalle $\left]\lim\limits_{\substack{x \to 0\\ x>0}} f(x)\,;\,\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)\right[$, l'équation $f(x) = k$ a une solution unique.

Comme $0 \in \left]\lim\limits_{\substack{x \to 0\\ x>0}} f(x)\,;\,\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)\right[= \mathbb{R}$, on en déduit que $\boxed{\text{l'équation } f(x) = 0 \text{ a une solution unique } \alpha}$.

La calculatrice donne $f(0{,}34) \approx -0{,}06$ donc $f(0{,}34) < 0$ et $f(0{,}35) \approx 0{,}03$ donc $f(0{,}35) > 0$
On en déduit que $f(0{,}34) < f(\alpha) < f(0{,}35)$ et comme f est strictement croissante : $\boxed{0{,}34 < \alpha < 0{,}35}$.

6°)



Partie III La suite numérique (x_n) est définie par $x_n = e^{\frac{n-2}{2}}$ pour tout nombre entier naturel n.

1°) a) On peut écrire pour tout $n \in \mathbb{N}$: $x_{n+1} = e^{\frac{n+1-2}{2}} = e^{\frac{n-2}{2}+\frac{1}{2}} = e^{\frac{n-2}{2}} \times e^{\frac{1}{2}} = x_n \times e^{\frac{1}{2}}$

On en déduit que : $\boxed{(x_n) \text{ est une suite géométrique de raison } e^{\frac{1}{2}}}$.

Son premier terme est $x_0 = e^{\frac{0-2}{2}}$ donc $\boxed{x_0 = e^{-1}}$.

b) (x_n) est une suite géométrique de premier terme positif et de raison positive, donc (x_n) est une suite à termes positifs.

On a $e^{\frac{1}{2}} \geqslant 1$ donc $x_n \times e^{\frac{1}{2}} \geqslant x_n$ c'est-à-dire $x_{n+1} \geqslant x_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Donc : $\boxed{\text{la suite } (x_n) \text{ est une suite croissante}}$.

2°) Pour tout entier naturel n, on a : $a_n = 4\displaystyle\int_{x_n}^{x_{n+1}} \left(f(x) - \frac{x}{2}\right) dx$.

a) D'après la partie II, on sait que $\left(f(x) - \frac{x}{2}\right) \geqslant 0$ pour $x \geqslant e^{-1}$

Comme la suite (x_n) est croissante on a $e^{-1} \leqslant x_n \leqslant x_{n+1}$.

Donc $\displaystyle\int_{x_n}^{x_{n+1}} \left(f(x) - \frac{x}{2}\right) dx$ est l'aire, en unités d'aire, de la partie du plan limitée par la courbe $(\mathscr{C})$, la droite (Δ) et les droites d'équations $x = x_n$ et $x = x_{n+1}$.

L'unité du repère étant 2cm, l'unité d'aire est 4cm^2 .

> $a_n = 4\displaystyle\int_{x_n}^{x_{n+1}} \left(f(x) - \frac{x}{2}\right) dx$ est l'aire, en cm^2, de la partie du plan limitée par la courbe $(\mathscr{C})$, la droite (Δ) et les droites d'équation $x = x_n$ et $x = x_{n+1}$.

b) $a_n = 4\displaystyle\int_{x_n}^{x_{n+1}} \left(f(x) - \frac{x}{2}\right) dx = 4\int_{x_n}^{x_{n+1}} \left(\frac{1 + \ell n\, x}{x}\right) dx = 4\int_{x_n}^{x_{n+1}} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x} \times \ell n\, x\right) dx$

$x \mapsto \frac{1}{x}$ a pour primitive $x \mapsto \ell n\, x$.

D'autre part $\frac{1}{x} \times \ell n\, x$ est de la forme $u'(x) \times u(x)$, donc $\frac{1}{x} \times \ell n\, x$ a pour primitive $\frac{1}{2} u(x)^2 = \frac{1}{2} (\ell n\, x)^2$.

On a donc : $a_n = \Big[4\ell n\, x + 2\,(\ell n\, x)^2 \Big]_{x_n}^{x_{n+1}} = 4\,\ell n\, x_{n+1} + 2\,(\ell n\, x_{n+1})^2 - 4\ell n\, x_n - 2\,(\ell n\, x_n)^2$

Donc

$$a_n = 4\ell n\, e^{\frac{n-1}{2}} + 2\left(\ell n\, e^{\frac{n-1}{2}}\right)^2 - 4\ell n\, e^{\frac{n-2}{2}} - 2\left(\ell n\, e^{\frac{n-2}{2}}\right)^2$$

$$a_n = 4 \times \frac{n-1}{2} + 2\left(\frac{n-1}{2}\right)^2 - 4 \times \frac{n-2}{2} - 2\left(\frac{n-2}{2}\right)^2$$

$$a_n = 2n - 2 + \frac{n^2 - 2n + 1}{2} - 2n + 4 - \frac{n^2 - 4n + 4}{2} = 2 + \frac{n^2 - 2n + 1 - n^2 + 4n - 4}{2}$$

$$a_n = 2 + \frac{2n-3}{2} = \frac{4 + 2n - 3}{2} \quad \text{donc} \quad \boxed{a_n = \frac{2n+1}{2} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}}.$$

On en déduit que : $a_n = n + \frac{1}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Donc $a_{n+1} = n + 1 + \frac{1}{2} = n + \frac{1}{2} + 1 = a_n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On en déduit que : $\boxed{(a_n) \text{ est une suite arithmétique de raison } 1}$.