Exercice B2

La partie I est l'étude d'une fonction auxiliaire g nécessaire à l'étude de la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1 + \ln x}{x}$.

L'étude de la fonction f fait l'objet de la partie II.

La partie III est l'étude de deux suites numériques associées.

Partie I

On considère la fonction numérique g définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = x^2 - 2 \ln x$

1°) Étudier le sens de variation de g .

2°) En déduire le signe de $g(x)$ sur $]0; +\infty[$.

Partie II

On considère la fonction numérique f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1 + \ln x}{x}$

On appelle $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 2cm).

1°) Déterminer la limite de f en 0. Interpréter graphiquement le résultat.

2°) a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = \frac{x}{2}$ est asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$.

c) Déterminer la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à (Δ) sur $]0; +\infty[$.

Montrer en particulier que (Δ) coupe $(\mathcal{C})$ en un point A que l'on déterminera.

3°) Étudier le sens de variation de f .

Dresser le tableau de variation de f .

4°) Montrer qu'il existe un point B, et un seul, de la courbe $(\mathcal{C})$ où la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ est parallèle à (Δ) . Préciser les coordonnées de B.

5°) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ a une solution unique α .

Justifier l'encadrement : $0,34 < \alpha < 0,35$

6°) Tracer la courbe $(\mathcal{C})$ et les droites (Δ) et (T) .

Partie III

On considère la suite numérique (x_n) définie par $x_n = e^{\frac{n-2}{2}}$ pour tout nombre entier naturel n .

1°) a) Montrer que (x_n) est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison.

b) Montrer que (x_n) est une suite croissante.

2°) Pour tout entier naturel n , on pose : $a_n = 4 \int_{x_n}^{x_{n+1}} \left(f(x) - \frac{x}{2} \right) dx$.

a) Donner une interprétation géométrique de a_n .

b) Montrer que $a_n = \frac{2n+1}{2}$ pour tout nombre entier naturel n .

En déduire que (a_n) est une suite arithmétique.