

Exercice A4

Partie A

1°) a) f est définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x - 2 + \frac{1}{2} \ln x$

On a $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x - 2 = -2$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{2} \ln x = -\infty$, donc par addition

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty.$$

D'autre part $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - 2 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \ln x = +\infty$, donc par addition

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

b) f est dérivable sur $]0; +\infty[$, car c'est la somme et le produit de fonctions dérivables, et on a :

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{x} \quad \text{donc} \quad f'(x) = \frac{2x + 1}{2x} \quad \text{pour tout } x \in]0; +\infty[.$$

Pour $x \in]0; +\infty[$, on a $2x > 0$ et $2x + 1 > 0$, donc $f'(x) > 0$,

on peut donc en déduire que : f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

2°) a) f est continue et strictement croissante sur $]0; +\infty[$, donc f est une bijection de $]0; +\infty[$ sur

$$\left[\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right] =]-\infty; +\infty[= \mathbb{R}.$$

On en déduit que pour tout $k \in \mathbb{R}$, l'équation $f(x) = k$ a une solution unique dans $]0; +\infty[$.

En particulier : l'équation $f(x) = 0$ a une solution unique ℓ dans $]0; +\infty[$.

En utilisant un tableau de valeurs de la fonction f , obtenu avec une calculatrice, on remarque que :

$f(1,72) \approx -0,0088$ et $f(1,73) \approx 0,0041$. On a donc $f(1,72) < 0 < f(1,73)$

c'est-à-dire $f(1,72) < f(\ell) < f(1,73)$

Comme f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$, on en déduit $1,72 < \ell < 1,73$

donc $\ell \approx 1,72$ à 10^{-2} près.

b) f étant strictement croissante sur $]0; +\infty[$, on peut en déduire que :

si $x < \ell$, alors $f(x) < f(\ell)$, c'est-à-dire $f(x) < 0$,

si $x > \ell$, alors $f(x) > f(\ell)$, c'est-à-dire $f(x) > 0$, donc

$$f(x) < 0 \quad \text{pour } x \in]0; \ell[\quad ; \quad f(x) > 0 \quad \text{pour } x \in]\ell; +\infty[\quad \text{et} \quad f(x) = 0 \quad \text{pour } x = \ell.$$

Partie B

La fonction g est définie sur $[0; +\infty[$ par :
$$\begin{cases} g(0) = 0 \\ g(x) = -\frac{7}{8}x^2 + x - \frac{1}{4}x^2 \ln x \end{cases}, \quad \text{pour tout réel } x > 0.$$

1°) a) Pour étudier la continuité de g en 0, étudions $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} g(x)$.

On a $\lim_{x \rightarrow 0} -\frac{7}{8}x^2 + x = 0$.

De plus on sait que $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln x = 0$ donc $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^2 \ln x = 0$ donc $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{4}x^2 \ln x = 0$.

On en déduit $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} g(x) = 0$ donc $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} g(x) = g(0)$. Donc $\boxed{g \text{ est continue en } 0}$.

Pour étudier la dérivabilité de g en 0, étudions $\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{g(0+h) - g(0)}{h}$.

On a $\frac{g(0+h) - g(0)}{h} = \frac{-\frac{7}{8}h^2 + h - \frac{1}{4}h^2 \ln h - 0}{h} = -\frac{7}{8}h + 1 - \frac{1}{4}h \ln h$.

On sait que $\lim_{h \rightarrow 0} -\frac{7}{8}h + 1 = 1$ et que $\lim_{h \rightarrow 0} h \ln h = 0$, on en déduit que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(0+h) - g(0)}{h} = 1$.

Cette limite étant un nombre réel, on peut en déduire que : $\boxed{g \text{ est dérivable en } 0 \text{ et } g'(0) = 1}$.

b) On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{7}{8}x^2 + x = -\infty$ (règle opératoire)

$\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{4}x^2 = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{4}x^2 \ln x = -\infty$

On en déduit $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{7}{8}x^2 + x - \frac{1}{4}x^2 \ln x = -\infty$ donc $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty}$.

2°) Sur $]0; +\infty[$, g est la somme et le produit de fonctions dérivables, donc g est dérivable et on a :

$$g'(x) = -\frac{7}{4}x + 1 - \frac{1}{2}x \ln x - \frac{1}{4}x^2 \times \frac{1}{x} = -\frac{7}{4}x + 1 - \frac{1}{2}x \ln x - \frac{1}{4}x,$$

donc $\boxed{g'(x) = -2x + 1 - \frac{1}{2}x \ln x \text{ pour tout } x \in]0; +\infty[}$.

Pour $x \in]0; +\infty[$, on a $x f\left(\frac{1}{x}\right) = x \times \left(\frac{1}{x} - 2 + \frac{1}{2} \ln \frac{1}{x}\right) = 1 - 2x + \frac{1}{2}x \ln \frac{1}{x}$.

On sait que $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$, donc $x f\left(\frac{1}{x}\right) = 1 - 2x - \frac{1}{2}x \ln x = g'(x)$.

Donc $\boxed{g'(x) = x f\left(\frac{1}{x}\right) \text{ pour tout } x \in]0; +\infty[}$.

3°) Sur l'intervalle $]0; +\infty[$, on a $x > 0$, donc $g'(x) = x f\left(\frac{1}{x}\right)$ est du signe de $f\left(\frac{1}{x}\right)$.

$\frac{1}{\ell}$ est un élément de $]0; +\infty[$ (car $\ell > 0$), et on a étudié dans la partie A le signe de f . Alors :

pour $0 < x < \frac{1}{\ell}$, on a $\frac{1}{x} > \ell$, par conséquent $f\left(\frac{1}{x}\right) > 0$, donc $g'(x) > 0$,

pour $x > \frac{1}{\ell}$, on a $0 < \frac{1}{x} < \ell$, par conséquent $f\left(\frac{1}{x}\right) < 0$, donc $g'(x) < 0$.

On peut donner le tableau de variations de g :

On a $g(1) = -\frac{7}{8} + 1 - \frac{1}{4} \ln 1 = \frac{1}{8}$.

On peut trouver, en utilisant une calculatrice, une valeur approchée de $\frac{1}{\ell}$ et de $g\left(\frac{1}{\ell}\right)$:

$\frac{1}{\ell} \approx 0,58$ et $g\left(\frac{1}{\ell}\right) \approx 0,331$.

x	0	$\frac{1}{\ell}$	$+\infty$
$g'(x)$	1	0	-
g	0	$g\left(\frac{1}{\ell}\right)$	$-\infty$

4°) L'équation de la tangente à la courbe représentative de g au point d'abscisse x_0 est :

$$y = g'(x_0)(x - x_0) + g(x_0).$$

Pour $x_0 = 0$, on a $g'(x_0) = 1$ et $g(x_0) = 0$

Pour $x_0 = 1$, on a $g'(x_0) = -2 + 1 - \frac{1}{2} \ln 1 = -1$ et $g(x_0) = \frac{1}{8}$

La tangente au point d'abscisse 0 a pour équation $y = x$.

La tangente au point d'abscisse 1 a pour équation $y = -(x - 1) + \frac{1}{8}$ c'est-à-dire $y = -x + \frac{9}{8}$.

Courbe représentative de g

