

Exercice A2

Partie I : Étude d'une fonction auxiliaire

1°) On sait que $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 2x + 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = \lim_{X \rightarrow +\infty} e^X = +\infty$

Donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 2x + 2)e^{-x} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - (x^2 - 2x + 2)e^{-x} = -\infty$ donc $\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty}$.

D'autre part, lorsque $x \neq 0$, on peut écrire $g(x) = 1 - x^2 \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right) e^{-x}$

On sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x} = 0$, et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right) = 1$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right) e^{-x} = 0$

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - x^2 \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right) e^{-x} = 1$ donc $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1}$.

2°) g est définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 1 - (x^2 - 2x + 2)e^{-x}$

g est donc somme, produit et composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$g'(x) = 0 - [(2x - 2)e^{-x} + (x^2 - 2x + 2)(-e^{-x})] = (-2x + 2 + x^2 - 2x + 2)e^{-x} = (x^2 - 4x + 4)e^{-x}$

donc $\boxed{g'(x) = (x - 2)^2 e^{-x}}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

La fonction exponentielle étant strictement positive, on en déduit que $\boxed{g'(x) \geq 0}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3°) g' étant positive sur $\mathbb{R}$ et ne s'annulant qu'en 2, on en déduit que la fonction g est strictement croissante sur $]-\infty; 2]$ et sur $[2; +\infty[$, donc : $\boxed{g \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}}$.

De plus la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc elle est continue sur $\mathbb{R}$.

On peut donner le tableau de variations de g :
on a $g(2) = 1 - 2e^{-2} \approx 0,73$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	+
g	$-\infty$	$1 - 2e^{-2}$	1

4°) g est une fonction définie, continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Donc g est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)[=]-\infty; 1[$.

On en déduit que pour tout $k \in]-\infty; 1[$, l'équation $g(x) = k$ a une solution unique dans $\mathbb{R}$.

Comme $0 \in]-\infty; 1[$, l'équation $g(x) = 0$ a, dans $\mathbb{R}$, une solution unique α .

On sait que $g(2) > 0$ et $g(0) = 1 - 2 = -1$ donc $g(0) < 0$

La fonction g étant strictement croissante, α appartient donc à l'intervalle $]0; 2[$.

Par balayages successifs, on obtient avec une calculatrice : $0,3 < \alpha < 0,4$ puis $\boxed{0,35 < \alpha < 0,36}$

En effet $g(0,35) \approx -0,0024$ et $g(0,36) \approx 0,1656$ donc $g(0,35) < g(\alpha) < g(0,36)$

5°) g étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on en déduit que :

pour tout $x \in]-\infty; \alpha[$ $g(x) < g(\alpha)$, donc $\boxed{g(x) < 0}$ pour tout $x \in]-\infty; \alpha[$.

pour tout $x \in]\alpha; +\infty[$ $g(x) > g(\alpha)$, donc $\boxed{g(x) > 0}$ pour tout $x \in]\alpha; +\infty[$.

et $\boxed{g(\alpha) = 0}$

Partie II : Étude de f

f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - 1 + (x^2 + 2)e^{-x}$

1°) Pour $x \neq 0$, on peut écrire $f(x) = x \left(1 - \frac{1}{x} + \left(x + \frac{2}{x} \right) e^{-x} \right)$

On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} x + \frac{2}{x} = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = \lim_{X \rightarrow +\infty} e^X = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + \frac{2}{x} \right) e^{-x} = -\infty$.

De plus $\lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - \frac{1}{x} = 1$, donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{1}{x} + \left(x + \frac{2}{x} \right) e^{-x} \right) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(1 - \frac{1}{x} + \left(x + \frac{2}{x} \right) e^{-x} \right) = +\infty$

c'est-à-dire $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

Pour tout réel x on peut écrire $f(x) = x - 1 + x^2 e^{-x} + 2e^{-x}$

On sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$ et on admet que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x} = 0$.

On en déduit alors par somme que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

2°) f est la somme, le produit et la composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$f'(x) = 1 + 2xe^{-x} + (x^2 + 2)(-e^{-x}) = 1 - (x^2 - 2x + 2)e^{-x} \text{ donc } \boxed{f'(x) = g(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}}.$$

3°) En utilisant le signe de la fonction g déterminé dans la partie I, on en déduit que :

f est strictement décroissante sur $] -\infty ; \alpha]$

et strictement croissante sur $[\alpha ; +\infty [$.

On peut alors donner le tableau de variation de f :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

4°) On a $f(\alpha) = \alpha - 1 + (\alpha^2 + 2)e^{-\alpha}$

Mais on sait que α est la solution de l'équation $g(\alpha) = 0$.

On a donc $1 - (\alpha^2 - 2\alpha + 2)e^{-\alpha} = 0$

c'est-à-dire $1 - (\alpha^2 + 2)e^{-\alpha} + 2\alpha e^{-\alpha} = 0$

donc $(\alpha^2 + 2)e^{-\alpha} = 1 + 2\alpha e^{-\alpha}$

On en déduit alors $f(\alpha) = \alpha - 1 + 1 + 2\alpha e^{-\alpha} = \alpha + 2\alpha e^{-\alpha}$ donc $\boxed{f(\alpha) = \alpha(1 + 2e^{-\alpha})}$.

5°) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) - (x - 1) = (x^2 + 2)e^{-x} = x^2 e^{-x} + 2e^{-x}$.

On sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$ et on admet que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x} = 0$.

On en déduit donc que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x - 1) = 0$

$\boxed{\text{La droite d'équation } y = x - 1 \text{ est donc asymptote oblique à (C) au voisinage de } +\infty}$.

Pour tout réel x , on a $f(x) - (x - 1) = (x^2 + 2)e^{-x}$.

On sait que $x^2 + 2$ et e^{-x} sont strictement positifs, on en déduit donc que $f(x) > x - 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

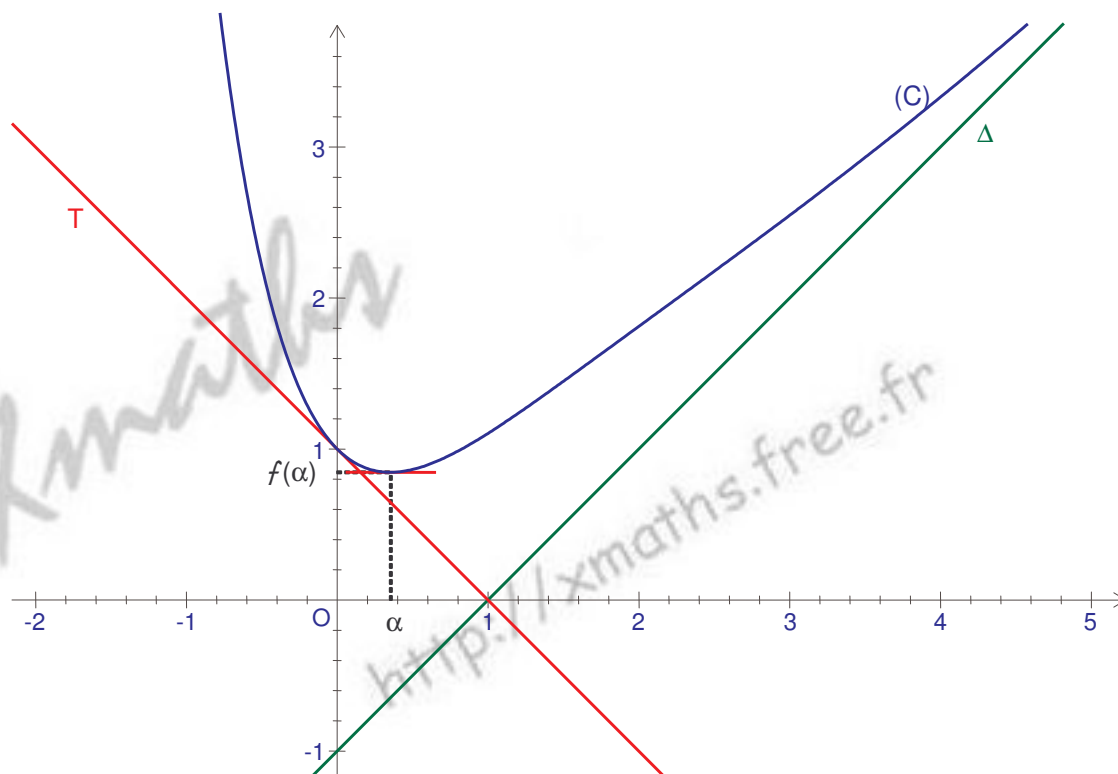
$\boxed{\text{La courbe (C) se trouve donc au dessus de } \Delta}$.

6°) La tangente T à (C) au point d'abscisse 0 a pour équation : $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

On a $f'(0) = g(0) = -1$ et $f(0) = -1 + 2e^0 = -1 + 2 = 1$

Donc $\boxed{(T) \text{ a pour équation } y = -x + 1}$

- 7°) Une calculatrice permet d'obtenir une valeur approchée de $f(\alpha)$: $f(\alpha) \approx 0,85$.
La courbe (C) a, au point d'abscisse α , une tangente horizontale.



Annexe

Pour démontrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x} = 0$, on peut écrire :

$$x^2 e^{-x} = 4 \frac{x^2}{4} \left(e^{-\frac{x}{2}} \right)^2 = 4 \left(\frac{x}{2} e^{-\frac{x}{2}} \right)^2$$

On sait que $\lim_{X \rightarrow +\infty} X e^{-X} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{2} e^{-\frac{x}{2}} \right) = 0$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2} = +\infty$

On en déduit $\lim_{x \rightarrow +\infty} 4 \left(\frac{x}{2} e^{-\frac{x}{2}} \right)^2 = 0$ donc $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x} = 0}$.

D'une manière similaire, on pourrait démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^{-x} = 0$.