

Exercice B1

Partie A : Étude de fonctions auxiliaires

1°) h est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = xe^x + 1$.

h est le produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc h est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x , on a $h'(x) = 1 \times e^x + x \times e^x = (1+x)e^x$.

On sait que la fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$, donc $h'(x)$ est du signe de $(1+x)$.

On en déduit que : h est décroissante sur $]-\infty; -1]$ et croissante sur $[-1; +\infty[$.

h a donc un minimum qui est $h(-1) = -e^{-1} + 1$.

Le minimum $h(-1)$ étant strictement positif, on en déduit que : $h(x) > 0$ pour tout réel x .

2°) g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x + 2 - e^x$.

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x + 2 = -\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} x + 2 - e^x = -\infty$ c'est-à-dire $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$.

D'autre part, pour $x \neq 0$, on peut écrire $g(x) = x \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{e^x}{x} \right)$.

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0$ et on sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{2}{x} - \frac{e^x}{x} = -\infty$.

On en déduit alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{e^x}{x} \right) = -\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$.

b) g est la somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a :

$g'(x) = 1 - e^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

La fonction exponentielle étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on a

$g'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - e^x > 0 \Leftrightarrow e^x < 1 \Leftrightarrow e^x < e^0 \Leftrightarrow x < 0$

et $g'(x) < 0 \Leftrightarrow 1 - e^x < 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow e^x > e^0 \Leftrightarrow x > 0$

Donc g est strictement croissante sur $]-\infty; 0]$ et strictement décroissante sur $[0; +\infty[$.

On peut donner le tableau de variations de g

On a $g(0) = 2 - e^0 = 1$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$		0	
	$+$		$-$
g	$-\infty$	1	$-\infty$

c) La fonction g est continue et strictement croissante sur $]-\infty; 0]$, donc g réalise une bijection de $]-\infty; 0]$ sur $\left] \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x); g(0) \right] =]-\infty; 1]$.

Pour tout réel k dans $]-\infty; 1]$, l'équation $g(x) = k$ a donc une solution unique dans $]-\infty; 0]$.

Puisque $0 \in]-\infty; 1]$, l'équation $g(x) = 0$ a donc une solution unique dans $]-\infty; 0]$.

De même g est continue et strictement décroissante sur $]0; +\infty[$, donc g réalise une bijection de $]0; +\infty[$ sur $\left] \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x); g(0) \right[=]-\infty; 1[$.

Pour tout réel k dans $]-\infty; 1[$, l'équation $g(x) = k$ a donc une solution unique dans $]0; +\infty[$.

Puisque $0 \in]-\infty; 1[$, l'équation $g(x) = 0$ a donc une solution unique dans $]0; +\infty[$.

L'équation $g(x) = 0$ a donc une solution unique dans $]-\infty; 0]$ et une solution unique dans $]0; +\infty[$.

Donc l'équation $g(x) = 0$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$.

Une calculatrice donne $g(1,14) \approx 0,013$ donc $g(1,14) > 0$ et $g(1,15) \approx -0,008$ donc $g(1,15) < 0$.

On en déduit que la solution positive α vérifie $1,14 < \alpha < 1,15$.

d) Sachant que $g(\beta) = 0$ et $g(\alpha) = 0$, et compte-tenu du sens de variation de g , on a :

$g(x) < 0$ pour $x \in]-\infty; \beta[\cup]\alpha; +\infty[$ et $g(x) > 0$ pour $x \in]\beta; \alpha[$.

Partie B : Étude de la fonction f et tracé de la courbe (C)

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1}$.

1°) On sait que $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x - 1 = -1$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x + 1 = 1$

donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$

on en déduit que : (C) a pour asymptote horizontale la droite d'équation $y = 1$ quand x tend vers $-\infty$

D'autre part on peut écrire : $f(x) = \frac{e^x(1 - e^{-x})}{e^x(x + e^{-x})} = \frac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}}$

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - e^{-x} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x + e^{-x} = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

On en déduit que :

(C) a pour asymptote horizontale la droite d'équation $y = 0$ (axe Ox) quand x tend vers $+\infty$

2°) a) On peut remarquer que $f(x) = \frac{e^x - 1}{h(x)}$, donc f est le quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

Comme de plus $h(x)$ ne s'annule pas, f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{e^x h(x) - (e^x - 1)h'(x)}{[h(x)]^2} = \frac{e^x(xe^x + 1) - (e^x - 1)(1 + x)e^x}{(xe^x + 1)^2}$

donc $f'(x) = \frac{e^x[xe^x + 1 - e^x - xe^x + 1 + x]}{(xe^x + 1)^2} = \frac{e^x[2 + x - e^x]}{(xe^x + 1)^2}$ donc $f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(xe^x + 1)^2}$

b) On sait que pour tout réel x , $e^x > 0$ et $(xe^x + 1)^2 > 0$, donc $f'(x)$ est du signe de $g(x)$.
Des résultats de la partie A, on peut déduire :

f est strictement décroissante sur $]-\infty; \beta[$ et sur $]\alpha; +\infty[$, et strictement croissante sur $]\beta; \alpha[$

On peut alors donner le tableau de variations de f

x	$-\infty$	β	α	$+\infty$			
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
f	-1	$f(\beta)$	$f(\alpha)$	0			

3°) a) Par définition, α est solution de l'équation $g(x) = 0$, on a donc $g(\alpha) = 0$ c'est-à-dire $\alpha + 2 - e^\alpha = 0$
donc $e^\alpha = \alpha + 2$

On a alors $f(\alpha) = \frac{e^\alpha - 1}{\alpha e^\alpha + 1} = \frac{\alpha + 2 - 1}{\alpha(\alpha + 2) + 1} = \frac{\alpha + 1}{\alpha^2 + 2\alpha + 1} = \frac{\alpha + 1}{(\alpha + 1)^2}$ donc $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha + 1}$

b) On sait que $1,14 < \alpha < 1,15$ donc $2,14 < \alpha + 1 < 2,15$

donc $\frac{1}{2,15} < \frac{1}{\alpha + 1} < \frac{1}{2,14}$ car la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $]0; +\infty[$.

On a $0,46 < \frac{1}{2,15}$ et $\frac{1}{2,14} < 0,47$ donc $0,46 < \frac{1}{2,15} < \frac{1}{\alpha + 1} < \frac{1}{2,14} < 0,47$

donc $0,46 < f(\alpha) < 0,47$

4°) La tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0 a pour coefficient directeur $f'(0) = g(0) = 1$

Donc l'équation de T est de la forme $y = x + b$

On a $f(0) = 0$, donc T passe par O. L'équation de T est donc $y = x$

5°) a) Pour tout réel x , on a

$$f(x) - x = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1} - x = \frac{e^x - 1 - x^2e^x - x}{xe^x + 1} = \frac{e^x(1 - x^2) - (1 + x)}{xe^x + 1} = \frac{(1 + x)[e^x(1 - x) - 1]}{xe^x + 1}$$

donc $\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R} \quad f(x) - x = \frac{(x+1)u(x)}{xe^x + 1} \quad \text{avec} \quad u(x) = e^x - xe^x - 1}$

b) La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = e^x - e^x - xe^x = -xe^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

La fonction exponentielle étant strictement positive, $u'(x)$ est du signe de $-x$.

Donc $\boxed{\text{la fonction } u \text{ est strictement croissante sur }]-\infty; 0] \text{ et strictement décroissante sur } [0; +\infty[}$.

u a donc pour maximum $u(0) = e^0 - 0 - 1 = 0$

D'après les variations de u , on a donc $\boxed{u(x) < 0 \text{ pour } x \neq 0 \text{ et } u(0) = 0}$.

c) En utilisant le signe de $h(x) = xe^x + 1$ donné dans la partie A et le signe de $u(x)$ déterminé dans la question précédente, on peut alors donner dans un tableau le signe de $\frac{(x+1)u(x)}{xe^x + 1}$ c'est-à-dire le signe de $f(x) - x$.

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$x + 1$		0	$+$	$+$
$u(x)$	$-$	$-$	0	$-$
$h(x) = xe^x + 1$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f(x) - x$	$+$	0	$-$	$-$

pour $x \in]-\infty; -1]$ on a donc $f(x) \geq x$ et pour $x \in [-1; +\infty[$ $f(x) \leq x$

On en déduit :

$\boxed{(C) \text{ est au-dessus de } (T) \text{ pour } x \in]-\infty; -1] \text{ et } (C) \text{ est au-dessous de } (T) \text{ pour } x \in [-1; +\infty[}$

(T) et (C) ont deux points communs d'abscisses -1 et 0 .

6°) Courbe.

