Exercice 1 : Sur 4 points *(commun à tous les candidats)*

1. Notons P sa valeur initiale

Augmentation de 60 % : $P\left(1 + \frac{60}{100}\right) = 1{,}6\ P$

Diminution de t % : $1{,}6P\left(1 - \frac{t}{100}\right)$

On veut : $1{,}6P\left(1 - \frac{t}{100}\right) = P \Leftrightarrow 1{,}6\left(1 - \frac{t}{100}\right) = 1$

$\Leftrightarrow 1 - \frac{t}{100} = \frac{1}{1{,}6}$

$\Leftrightarrow \frac{t}{100} = 1 - \frac{10}{16}$

$\Leftrightarrow t = 100 \times \frac{6}{16}$

$\Leftrightarrow t = 37{,}5$

Pour revenir à sa valeur initiale, ce prix doit baisser de : 37,5 %.

2. Rappel :
A et B indépendants donc $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$
A et B incompatibles ou disjoints donc $P(A \cap B) = 0$

Ici on considère deux événements indépendants A et B donc $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Donc $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
$= 0{,}3 + 0{,}5 - 0{,}3 \times 0{,}5$
$= 0{,}65$ **$P(A \cup B) = 0{,}65$.**

3. On a $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (2x - 1)] = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Donc la courbe représentative de la fonction *f* dans un repère orthonormal du plan admet pour asymptote oblique la droite d'équation : y = 2x – 1

Rq : y = 0 est une droite horizontale donc il faudrait que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ soit égale à 0

or $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ vaut $+\infty$

x = 2 est une droite verticale donc il faudrait que $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ soit égale à $\pm\infty$

or $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ vaut $\frac{7}{2}$

y = – x + 1 est une droite (oblique) donc il faudrait que $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (-x + 1)]$ soit égale à 0

or $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (-x + 1)] = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(3x - 2 + \frac{1}{x}\right) = +\infty$

4. A $= 2\ln\left(\frac{e}{4}\right) + 5\ln 2 + \ln\left(\frac{8}{e}\right)$

$= 2\ln e - 2\ln 4 + 5\ln 2 + \ln 8 - \ln e$ $\quad$ ($\ln\left(\frac{A}{B}\right) = \ln A - \ln B$)

$= \ln e - 2\ln 2^2 + 5\ln 2 + \ln 2^3$ $\quad$ ($4 = 2^2$ et $8 = 2^3$)

$= 1 - 4\ln 2 + 5\ln 2 + 3\ln 2$ $\quad$ ($\ln e = 1$ et $\ln a^n = n \ln a$)

$\mathbf{= 1 + 4\ln 2}$

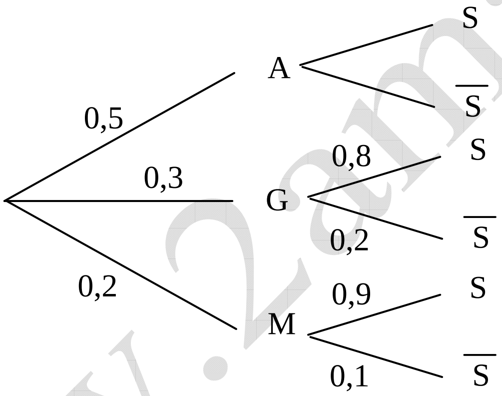
Le nombre A = $2\ln\left(\frac{e}{4}\right) + 5\ln 2 + \ln\left(\frac{8}{e}\right)$ est égal à : 1 + 4 1n 2.

<u>Exercice 2 :</u> Sur 5 points (*Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité*)

1. 50 % des clients choisissent la destination A donc **P(A) = 0,5**
30 % des clients choisissent la destination G donc **P(G) = 0,3**
20 % des clients choisissent la destination M donc **P(M = 0,2**

90 % des clients ayant choisi la destination M sont satisfaits donc $P_M(S) = 0,9$
80% des clients ayant choisi la destination G sont satisfaits donc $P_G(S) = 0,8$
On en déduit : $P_M(\overline{S}) = 1 - 0,9 = 0,1$ et $P_G(\overline{S}) = 1 - 0,8 = 0,2$

Arbre de probabilité :



2. a. $G \cap S$ est l'événement : « le questionnaire est celui d'un client ayant choisit la destination G et qui est satisfait »
$M \cap S$ est l'événement : « le questionnaire est celui d'un client ayant choisit la destination M et qui est satisfait »

$P(G \cap S) = P(G)P_G(S)$
$= 0,3 \times 0,8$
$\mathbf{P(G \cap S) = 0,24}$

$P(M \cap S) = P(M)P_M(S)$
$= 0,2 \times 0,9$
$\mathbf{P(M \cap S) = 0,18}$

b. 72 % des clients de l'agence sont satisfaits donc P(S) = 0,72
A, G et M forment une partition de l'ensemble des voyages proposés, donc, d'après la formule des probabilités totales, on a :

$P(S) = P(A \cap S) + P(G \cap S) + P(M \cap S)$

Donc $P(A \cap S) = P(S) - P(G \cap S) - P(M \cap S)$
$= 0,72 - 0,24 - 0,18$

Donc $\mathbf{P(A \cap S) = 0,3}$

www.2amath.fr

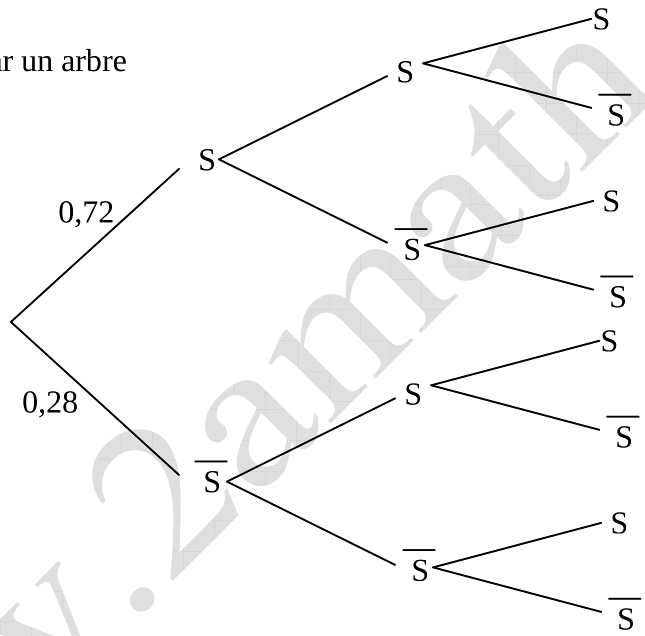
c. $P_A(S) = \dfrac{P(A \cap S)}{P(A)} = \dfrac{0{,}3}{0{,}5}$ donc $\mathbf{P_A(S) = 0{,}6}$

3. On veut déterminer $P_S(G)$.

$$P_S(G) = \frac{P(S \cap G)}{P(S)}$$
$$= \frac{0{,}24}{0{,}72}$$
$$= \frac{24}{72} \quad \text{donc } \mathbf{P_S(G) = \frac{1}{3}}$$

4. La loi de probabilité associée à cette expérience est une loi binomiale de paramètres 3 (car il y a 3 questionnaires de prélevés) et 0,72 (car la probabilité que le client soit satisfait est 0,72)

Représentons la situation par un arbre



L'événement : « les trois questionnaires sont ceux de clients insatisfaits » correspond au chemin $\overline{S}\ \overline{S}\ \overline{S}$ donc la probabilité de cette événement est $\mathbf{0{,}28^3 = 0{,}022}$ **au millième prés.**

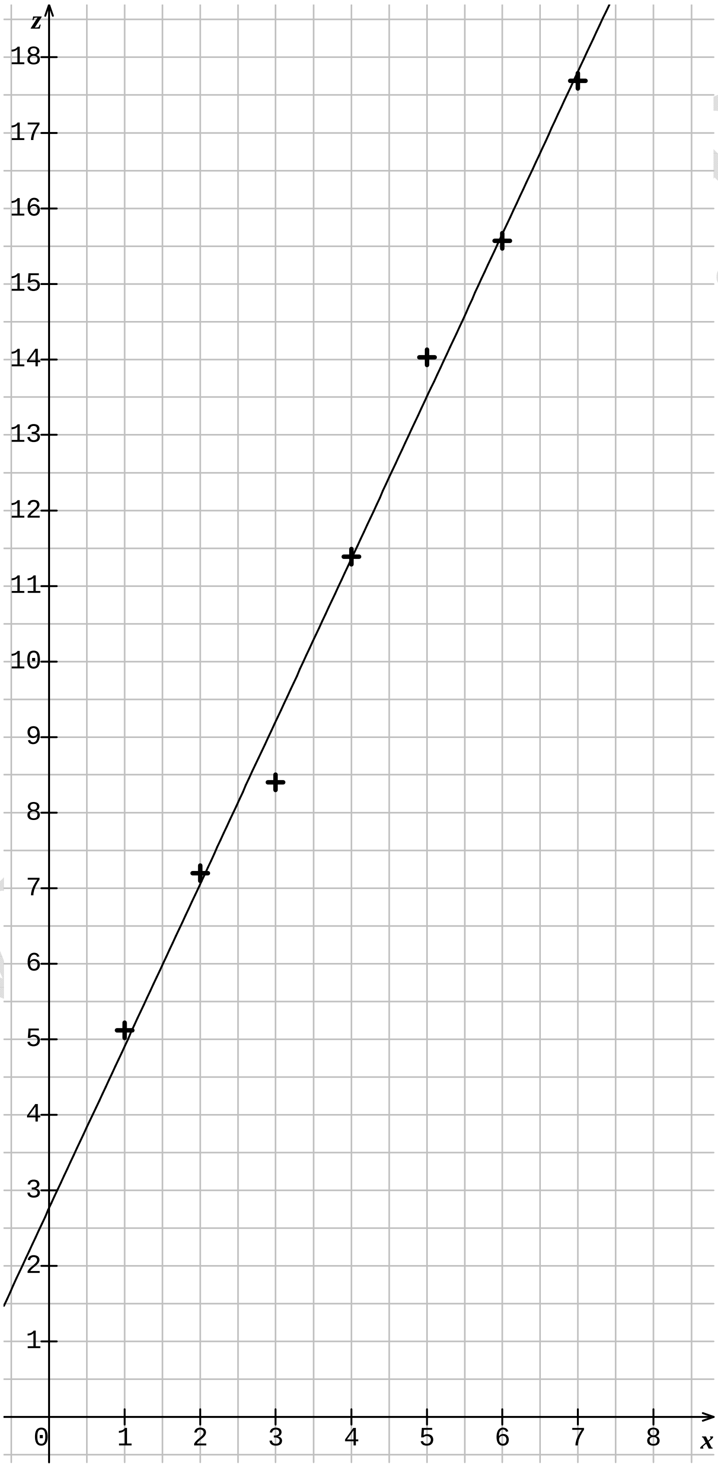
www.2amath.fr

Exercice 3 : **Sur 4 points** ***(commun à tous les candidats)***

1. Tableau : $z = \sqrt{y} - 3$. (*résultats arrondis au centième*).

Rang de l'année x_i	1	2	3	4	5	6	7
z_i	5,12	7,20	8,40	11,39	14,03	15,57	17,69

2. Nuage de point :



L'alignement apparent des points suggère qu'un ajustement affine est approprié.

3. Une équation de la droite d'ajustement affine de z en x par la méthode des moindres carrés est : z = 2,15x + 2,76 (*coefficients arrondis au centième*).

Tracé de cette droite : voir graphique question **2.**

4. On a $z = \sqrt{y} - 3$ donc $\sqrt{y} = z + 3$ soit $y = (z + 3)^2$
Comme $z = 2,15x + 2,76$ on a alors $y = (2,15x + 5,76)^2$

$$\begin{aligned}
y > 900 &\Leftrightarrow (2,15x + 5,76)^2 > 900 \\
&\Leftrightarrow 2,15x + 5,76 > \sqrt{900} \\
&\Leftrightarrow 2,15x + 5,76 > 30 \\
&\Leftrightarrow 2,15x > 30 - 5,76 \\
&\Leftrightarrow x > \frac{24,24}{2,15} \\
&\Leftrightarrow x > 11,27.
\end{aligned}$$

En utilisant cet ajustement, l'effectif de ce centre d'appel dépassera 900 employés à partir de l'année de rang 12 soit l'année 2012.
En 2011 l'effectif sera inférieur à 900, en 2012 il sera supérieur à 900.

www.2amath.fr

<u>Exercice 4 :</u> Sur 7 points ***(commun à tous les candidats)***

PARTIE A

1. **a.** La courbe *C* passe par A(1 ;5), donc : $\boldsymbol{f(1) = 5}$

La courbe *C* admet également une tangente horizontale au point d'abscisse $-\frac{1}{2}$, donc :

$\boldsymbol{f'\left(-\frac{1}{2}\right) = 0}$

b. Les points A et B appartiennent à la droite *D*, donc le coefficient directeur de *D* est :

$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2-5}{0-1} = \mathbf{3}$

Or *D* est la tangente à *C* en A d'abscisse 1, donc : $\boldsymbol{f'(1) = 3}$

2. $f(x) = (ax + b)e^{x-1} + c$ sur $\mathbb{R}$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout réel x :

$f'(x) = a \times e^{x-1} + (ax + b) \times 1e^{x-1} + 0$

$\boldsymbol{f'(x) = (ax + a + b)e^{x-1}}$**.**

3. D'après **1.** et **2.** : $\begin{cases} f(1) = 5 \\ f'\left(-\frac{1}{2}\right) = 0 \\ f'(1) = 3 \end{cases}$

D'où : $\begin{cases} (a+b)e^0 + c = 5 \\ (-\frac{1}{2}a + a + b)e^{-1/2-1} = 0 \\ (a + a + b)e^0 = 3 \end{cases}$

$\begin{cases} a + b + c = 5 \\ (\frac{1}{2}a + b)\, e^{-3/2} = 0 \\ 2a + b = 3 \end{cases}$ car $e^0 = 1$

$\begin{cases} a + b + c = 5 \\ \frac{1}{2}a + b = 0 \\ 2a + b = 3 \end{cases}$ car $e^{-3/2}$ est non−nul

On multiplie les deux membres de la deuxième équation par 2 :

$\begin{cases} \mathbf{a + b + c = 5} \\ \mathbf{a + 2b = 0} \\ \mathbf{2a + b = 3} \end{cases}$

Déterminons les valeurs de a, b et c :

$\begin{cases} a + b + c = 5 \\ a = -2b \\ 2(-2b) + b = 3 \end{cases}$

$$\begin{cases} a + b + c = 5 \\ a = -2b \\ b = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + b + c = 5 \\ a = 2 \\ b = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 - 1 + c = 5 \\ a = 2 \\ b = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{c = 4} \\ \mathbf{a = 2} \\ \mathbf{b = -1} \end{cases}$$

PARTIE B

On admet pour la suite de l'exercice que, pour tout réel x, $f(x) = (2x - 1)e^{x-1} + 4$.

1. **a.** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (2x - 1)e^{x-1} + 4$

Or : $\lim\limits_{x \to +\infty} x - 1 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

Donc par composition : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x-1} = +\infty$

De plus : $\lim\limits_{x \to +\infty} (2x - 1) = +\infty$

Donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} (2x - 1)e^{x-1} = +\infty$ par produit

D'où : $\mathbf{\lim\limits_{x \to +\infty} \boldsymbol{f}(x) = +\infty}$

b. $f(x) = (2x - 1)e^{x-1} + 4$

$f(x) = (2x - 1)\dfrac{e^x}{e} + 4$

$\boldsymbol{f(x) = \dfrac{2}{e} xe^x - \dfrac{1}{e} e^x + 4}$ en développant.

$\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2}{e}xe^x = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} -\dfrac{1}{e}e^x = 0$

D'où : $\mathbf{\lim\limits_{x \to -\infty} \boldsymbol{f}(x) = 4}$. par somme

On en déduit que la courbe *C* admet en −∞ une asymptote horizontale d'équation : y = 4

2. **a.** D'après **2.,** pour tout réel x : $f\,'(x) = (ax + a + b)e^{x-1}$. et on a : $\begin{cases} c = 4 \\ a = 2 \\ b = -1 \end{cases}$

Donc, pour tout réel x : $\boldsymbol{f\,'(x) = (2x + 1)e^{x-1}}$.

b. Etudions le signe de $f\,'(x)$:

$e^{x-1} > 0$ car la fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$.
Donc le signe de $f\,'(x)$ est le même que celui de : $2x + 1$

$f\,'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x + 1 = 0$

$f\,'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\dfrac{1}{2}$

De même :

$f\,'(x) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < -\dfrac{1}{2}$ et $f\,'(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > -\dfrac{1}{2}$

De plus : $f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -2e^{-3/2} + 4$

D'où **le tableau de variation de *f***

x	$-\infty$		$-1/2$		$+\infty$
$f\,'(x)$		$-$		$+$	
f	4	$\searrow$	$-2e^{-3/2} + 4$	$\nearrow$	$+\infty$

Le minimum de f sur $\mathbb{R}$ est : $f\left(-\dfrac{1}{2}\right) \approx 3{,}55$. Ce minimum est strictement positif, donc :

f(x) > 0 pour tout réel x

c. La fonction f est continue et strictement croissante sur l'intervalle [1 ; 2].
De plus, $f(1) = 5$ d'après A1. et $f(2) = (4 - 1)e^{2-1} + 4 = 3e + 4$
$f(2) \approx 12{,}15$

D'où : $6 \in [f(1) \,;\, f(2)]$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, **l'équation $f(x) = 6$ admet une unique solution réelle α sur l'intervalle [1 ; 2].**

Par balayage, on trouve : $f(1{,}2) \approx 5{,}7$ et $f(1{,}3) \approx 6{,}2$
$f(1{,}2) < 6 < f(1{,}3)$
donc : $\boldsymbol{1{,}2 < \alpha < 1{,}3}$

www.2amath.fr

PARTIE C

1. Pour tout réel x : $F(x) = (2x - 3)e^{x-1} + 4x$.
F est dérivable et sa dérivée est F' telle que :

$F'(x) = 2\,e^{x-1} + (2x - 3)\,e^{x-1} + 4$
$F'(x) = (2x - 1)\,e^{x-1} + 4$
$F'(x) = f(x)$

Donc : **F est une primitive de *f* sur $\mathbb{R}$**.

2. Soit Δ la partie du plan située entre la courbe *C*, l'axe des abscisses et les droites d'équations x = 0 et x = 1.

D'après **B2b**., *f* est positive, donc l'aire de Δ en unités d'aire est égale à :

$A = \int_0^1 f(x)\,dx$
$A = F(1) - F(0)$
$A = (2 - 3)e^0 + 4 - (-3)e^{-1}$
$A = -1 + 4 + 3\,e^{-1}$
$\boldsymbol{A = 3 + 3\,e^{-1}}$ **unités d'aires**
$\boldsymbol{A \approx 4{,}1}$ **unités d'aires**

www.2amath.fr