

Exercice 1 (6 points) Commun à tous les candidats**Partie A**

1. La tangente T à C_f passe par les points A(0 ; 2) et D(-2 ; 0). Son coefficient directeur est égal à $f'(0)$.

$$\text{Donc } f'(0) = \frac{0 - 2}{-2 - 0} = 1$$

Réponse a : $f'(0) = 1$

2. La fonction f est strictement positive sur $[-5 ; 2]$.

Donc $g(x) = \ln f(x)$ est définie sur $D_g = [-5 ; 2]$.

Réponse c : $[-5 ; 2]$.

3. Le point A (0 ; 2) appartient à C_f donc $f(0) = 2$

Donc $g(0) = \ln f(0) = \ln 2$

Réponse c : $\ln 2$

4. $g(x) = \ln f(x)$ on a donc : $g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$

$$\text{Donc } g'(1) = \frac{f'(1)}{f(1)}$$

La tangente en B à C_f est parallèle à l'axe des abscisses donc $f'(1) = 0$

Donc $g'(1) = 0$

Réponse b : $g'(1) = 0$

5. Le point C(2, 0) appartient à C_f donc $f(2) = 0$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$$

$$\text{On a } \lim_{X \rightarrow 0} \ln X = -\infty$$

$$\text{Donc par composée } \lim_{X \rightarrow 0} g(x) = -\infty$$

Réponse a : $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = -\infty$

Partie B

1. Sur $[0, 2]$ f est positive donc I est égale à l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe C_f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$.

Notons A_1 l'aire de la partie du plan délimitée par l'axe des abscisses, la droite d'équation $y = 2$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1,5$. donc $A_1 = 1,5 \times 2 = 3$ (aire d'un rectangle)

Notons A_2 l'aire de la partie du plan délimitée par l'axe des abscisses, la droite d'équation $y = 3$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$. donc $A_2 = 3 \times 2 = 6$ (aire d'un rectangle)

On a $A_1 \leq I \leq A_2$ donc $3 \leq I \leq 6$.

Réponse b : $[3 ; 6]$

2. f est croissante sur $[-5, 1]$ et décroissante sur $[1; \frac{5}{2}]$

donc $f'(x) > 0$ sur $[-5, 1]$ et $f'(x) < 0$ sur $[1; \frac{5}{2}]$.

Seule la courbe C_3 convient.

Réponse c : La courbe (C_3)

3. F est une primitive de f sur $[-5; \frac{5}{2}]$ donc $F'(x) = f(x)$.

Sur $[-5; 2]$ $f(x) > 0$ donc F est croissante.

Sur $[2; \frac{5}{2}]$ $f(x) < 0$ donc F est décroissante.

Seule la courbe C_1 convient

Réponse a : La courbe (C_1)

Exercice 2 (5 points) (Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

1. $P(N) = \frac{30}{200} = 15 \%$

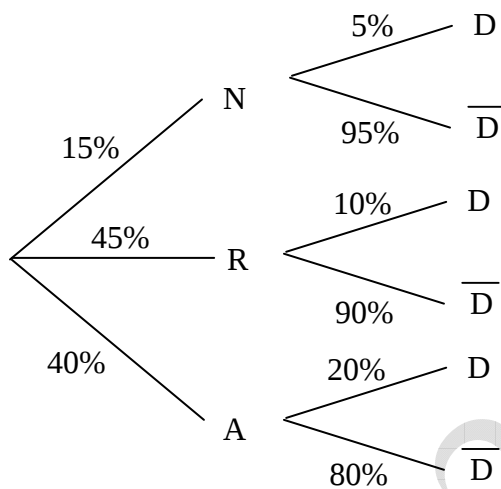
$$P(R) = \frac{90}{200} = 45 \%$$

N, R, et A forment une partition de l'univers donc : $P(A) = 1 - P(R) - P(N)$
 $P(A) = 40 \%$

$$P_N(D) = 5 \% \text{ donc } P_N(\overline{D}) = 1 - 5 \% = 95 \%$$

$$P_R(D) = 10 \% \text{ donc } P_R(\overline{D}) = 1 - 10 \% = 90 \%$$

$$P_A(D) = 20 \% \text{ donc } P_A(\overline{D}) = 1 - 20 \% = 80 \%$$



2. La probabilité que l'ordinateur soit neuf et défaillant est :

$$P(N \cap D) = P(N) P_N(D)$$

$$P(N \cap D) = \frac{15}{100} \times \frac{5}{100}$$

$$P(N \cap D) = 0,75 \%$$

3. N, R, et A forment une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales, la probabilité qu'un ordinateur soit défaillant est :

$$P(D) = P(N \cap D) + P(R \cap D) + P(A \cap D)$$

$$P(D) = P(N) P_N(D) + P(R) P_R(D) + P(A) P_A(D)$$

$$P(D) = \frac{0,75}{100} + \frac{45}{100} \times \frac{10}{100} + \frac{40}{100} \times \frac{20}{100}$$

$$P(D) = \frac{0,75 + 4,5 + 8}{100}$$

$$P(D) = 0,1325 = 13,25 \%$$

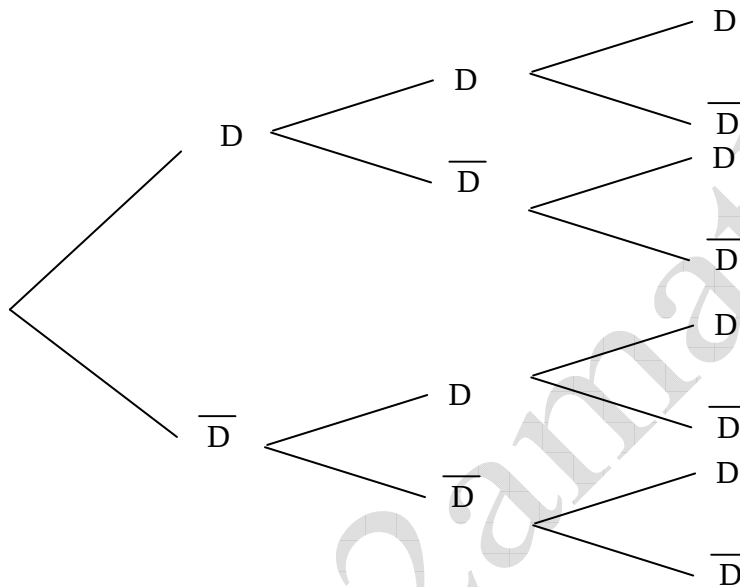
4. La probabilité que l'ordinateur soit ancien sachant qu'il est défaillant est :

$$P_D(A) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)}$$

$$P_D(A) = \frac{\frac{40}{100} \times \frac{20}{100}}{\frac{13,25}{100}}$$

$$P_D(A) \approx 0,60$$

5. On choisit au hasard 3 ordinateurs et on assimile ces choix à des tirages successifs avec remise, dont les issues possibles sont D et $\overline{D}$. On est donc dans le cas d'un schéma de Bernoulli.



Les tirages sont indépendants, donc :

La probabilité qu'exactement un des ordinateurs soit défaillant est

$$p = P(D)P(\overline{D})P(\overline{D}) + P(\overline{D})P(D)P(\overline{D}) + P(\overline{D})P(\overline{D})P(D)$$

Or $P(\overline{D}) = 1 - P(D)$

$$P(\overline{D}) = 1 - 0,1325$$

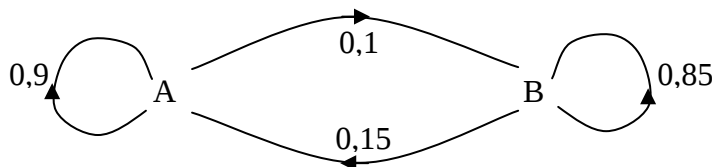
$$P(\overline{D}) = 0,8675$$

$$p = 3 \times 0,1325 \times 0,8675^2$$

$$p \approx 0,30$$

Exercice 2 (5 points) Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. A l'état initial, on a : $P(A) = 0,2$, d'après l'énoncé. Donc : $P(B) = 1 - 0,2 = 0,8$
D'où la matrice de l'état probabiliste initial :
 $P_0 = (0,2 \quad 0,8)$
2. 10 % des personnes préférant Aurore et 15 % des personnes préférant Boréale changent d'avis d'une semaine sur l'autre, d'où le graphe probabiliste :



3. a) La matrice de transition est : $M = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,15 & 0,85 \end{pmatrix}$
- b) $P_1 = P_0 M$

$$P_1 = (0,2 \quad 0,8) \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,15 & 0,85 \end{pmatrix}$$

$$P_1 = (0,2 \times 0,9 + 0,8 \times 0,15 \quad 0,2 \times 0,1 + 0,8 \times 0,85)$$

$$P_1 = (0,3 \quad 0,7)$$
4. a) $P_n = P_0 M^n$

$$P_n = P_0 \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,15 & 0,85 \end{pmatrix}^n$$
- b) $P_3 = P_0 M^3$

$$P_3 = (0,2 \quad 0,8) \begin{pmatrix} 0,76875 & 0,23125 \\ 0,346875 & 0,653125 \end{pmatrix}$$

$$P_3 = (0,43125 \quad 0,56875)$$

On en déduit **qu'au bout de 3 semaines, environ 43 % des personnes interrogées préfèrent Aurore et 57 % préfèrent Boréale.**
5. a) Soit $a = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ et $b = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$
 Or, on a, d'après 2. : $a_{n+1} = 0,9 a_n + 0,15 b_n$
 et $a_n + b_n = 1$
 D'où :
$$\begin{cases} a = 0,9 a + 0,15 b \\ a + b = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 1,5 b \\ a + b = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 1,5 b \\ 2,5 b = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 0,4 \\ a = 0,6 \end{cases}$$
- b) A l'état stable (au bout d'un certain temps), on a, d'après a), 60 % des personnes qui préfèrent Aurore, donc **Aurore finit par être préféré au parfum Boréale.**

Exercice 3 : (9 points)

Commun à tous les candidats

Partie I**1. Voir graphique en fin d'exercice****2. a.** Soit G le point moyen. G a pour coordonnées :

$$\overline{x} = \frac{0 + 1 + 2 + 3 + 4}{5} = 2 \quad \text{et} \quad \overline{y} = \frac{81,3 + 92,3 + 109,7 + 128,5 + 131,2}{5} = 108,6$$

Les coordonnées du point moyen sont **(2 ; 108,6)****b.** Une équation de la droite (D) d'ajustement affine de y en x par la méthode des moindres carrés est : **$y = 13,6x + 81,4$** .**c. Voir graphique en fin d'exercice****d.** Le rang de l'année 2007 est 8.

$$13,6 \times 8 + 81,4 = 190,2$$

Le nombre de véhicules vendus en 1007 sera de 190,2 milliers soit 190 200.**3. a. Voir graphique en fin d'exercice****b.** Les points ne sont pas alignés avec les points précédents, donc **l'ajustement affine précédent n'est plus adapté.****c.** A(4 ; 131,2) et B(8 ; 76,1) appartient à la courbe, donc remplace leur coordonnéesdans $y = e^{cx+d}$. On obtient ainsi le système :
$$\begin{cases} 131,2 = e^{4c+d} \\ 76,1 = e^{8c+d} \end{cases}$$

Résolvons ce système :

$$\begin{cases} 131,2 = e^{4c+d} \\ 76,1 = e^{8c+d} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4c + d = \ln 131,2 \\ 8c + d = \ln 76,1 \end{cases}$$

Par soustraction : $4c = \ln 76,1 - \ln 131,2$

$$= \ln \frac{76,1}{131,2}$$

$$\text{Soit } c = \frac{1}{4} \ln \frac{76,1}{131,2}$$

Donc on a : $d = \ln 131,2 - 4c$

$$= \ln 131,2 - \ln \frac{76,1}{131,2}$$

$$= \ln \frac{131,2}{76,1}$$

$$= \ln \frac{131,2^2}{76,1}$$

$$\text{Donc } c = \frac{1}{4} \ln \frac{76,1}{131,2} \text{ et } d = \ln \frac{131,2^2}{76,1}$$

Soit $c = -0,136$ et $d = 5,421$ au millième

Partie II

Sur $[4 ; 10]$ $f(x) = e^{-0,136x + 5,421}$

1. Sur $[4 ; 10]$, f est dérivable et on a :

$$f'(x) = -0,136 e^{-0,136x + 5,421} \quad (e^u)' = u'e^u$$

Comme $-0,136 < 0$ et qu'une exponentielle est toujours positive, alors sur $[4 ; 10]$ on a f' est négative.

Donc sur $[4 , 10]$, la fonction f est décroissante.

2. Voir graphique en fin d'exercice

3. a. $f(x) \leq 65 \Leftrightarrow e^{-0,136x + 5,421} \leq 65$
 $\Leftrightarrow -0,136x + 5,421 \leq \ln 65$ car $\ln$ est croissante sur $]0 ; +\infty[$.
 $\Leftrightarrow -0,136x \leq -5,421 + \ln 65$
 $\Leftrightarrow x \geq \frac{-5,421 + \ln 65}{-0,136}$

$$f(x) \leq 65 \Leftrightarrow x \geq 9,2$$

65 000 = 65 milliers

L'entreprise devra prévoir l'arrêt de la fabrication du modèle pour l'année correspondant à $x = 10$ soit en 2009.

b. Pour résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \leq 65$, il faut tracer la droite d'équation $y = 65$.

Les solutions de l'inéquation, sont donc les abscisses des points tels que la courbe soit en dessous de la droite d'équation $y = 65$ où la coupe.

Voir graphique page suivante

